1. Úplný problém vlastních čísel

Úkolem je nalézt v sechna vlastní čísla a případně i všechny vlastní vektory dané regulární matice.

1.1. **Trojúhelníková metoda a LR-algoritmus.**

1.1.1. *Trojúhelníková metoda.* Konstruujeme dvě posloupnosti matic (L_s), (R_s) tak, že L_0 zvolíme a matice L_1, R_1 získáme z rozkladu matice AL_0 na součin dolní trojúhelníkové matice s jedničkami na diagonále a horní trojúhelníkové matice: $AL_0 = L_1R_1$. Předpokládejme, že matice AL_0 je silně regulární, aby byl tento rozklad jednoznačný. Dále postupujeme analogicky:

$$AL_k = L_{k+1}R_{k+1}, \tag{1}$$

přičemž L_{k+1} je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále a R_{k+1} horní trojúhelníková matice.

Za příznivých okolností posloupnost (L_s) konverguje a potom vlastní čísla a vektory matice A najdeme snadno:

Tvrzení 1.1. Nechť posloupnost (L_s) konverguje k matici L. Potom konverguje i posloupnost (R_s), a označíme-li R limitní matici této posloupnosti, platí:

(1) Diagonální prvky matice R jsou vlastní čísla matice A.
(2) Je-li $\vec{y}$ vlastní vektor matice R, potom $L\vec{y}$ je vlastní vektor matice A.

Důkaz. Z (1) vyplývá $R_{k+1} = L_{k+1}^{-1}AL_k$, a konverguje-li posloupnost (L_s), potom zřejmě konverguje i posloupnost (L_s^{-1}), takže musí konvergovat i posloupnost (R_s). Zlimicením tohoto vztahu dostaneme $R = L^{-1}AL$.

(1) Poslední rovnost znamená, že matice R je podobná matici A, a tudíž má stejná vlastní čísla. Protože všechny členy posloupnosti (R_s) jsou horní trojúhelníkové matice, musí být podle definice **??** matice R též horní trojúhelníková a vlastními čísly trojúhelníkové matice jsou její diagonální prvky.
(2) Platí $R\vec{y}^{(i)} = \lambda_i\vec{y}^{(i)}$, ale $R = L^{-1}AL$, takže $AL\vec{y}^{(i)} = \lambda_i L\vec{y}^{(i)}$.

□

1.1.2. *LR-algoritmus.* Konstruujeme tři posloupnosti matic (A_s), $(\bar{L}_s)$, $(\bar{R}_s)$ tak, že položíme $A_1 = A$ a matice $\bar{L}_1$, $\bar{R}_1$ získáme z rozkladu matice A_1 na součin dolní trojúhelníkové matice s jedničkami na diagonále a horní trojúhelníkové matice: $A_1 = \bar{L}_1\bar{R}_1$. Předpokládejme, že matice A je silně regulární, aby byl tento rozklad jednoznačný. Matici A_2 získáme takto: $A_2 = \bar{R}_1\bar{L}_1$. Dále postupujeme analogicky:

$$A_{k+1} = \bar{R}_k\bar{L}_k \longrightarrow A_{k+1} = \bar{L}_{k+1}\bar{R}_{k+1}. \tag{2}$$

Z druhé rovnice v (2) plyne $\bar{R}_k = \bar{L}_k^{-1}A_k$. Tento vztah dosadíme do první rovnice tamtéž a máme $A_{k+1} = \bar{L}_k^{-1}A_k\bar{L}_k$. To znamená, že všechny matice A_k jsou si podobné. Za příznivých okolností konverguje posloupnost (A_s) k horní trojúhelníkové matici; za méně příznivých alespoň některé prvky matic A_k pod diagonálou konvergují k nule a díky tomu dokážeme vlastní čísla určit i tehdy.

1.1.3. *Odvození vzorců pro rozklad.* Buďte $A = (a_{ij})$,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \; R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{pmatrix}.$$

Z rovnosti $A = LR$ dostaneme

$$\begin{aligned} a_{ij} &= l_{i1}r_{1j} + l_{i2}r_{2j} + \ldots + l_{ii-1}r_{i-1j} + r_{ij} && \text{pro } i \le j,\ j \in \hat{n}, \\ a_{ij} &= l_{i1}r_{1j} + l_{i2}r_{2j} + \ldots + l_{ij-1}r_{j-1j} + l_{ij}r_{jj} && \text{pro } i > j,\ i \in \hat{n} \end{aligned}$$

a odtud plyne

$$\begin{aligned} r_{ij} = &\ a_{ij} - (l_{i1}r_{1j} + l_{i2}r_{2j} + \ldots + l_{ii-1}r_{i-1j}) && \text{pro } i \le j,\ j \in \hat{n}, \\ l_{ij} = &\ \tfrac{1}{r_{jj}}[a_{ij} - (l_{i1}r_{1j} + l_{i2}r_{2j} + \ldots + l_{ij-1}r_{j-1j})] && \text{pro } i > j,\ i \in \hat{n}. \end{aligned}$$

Prvky r_{ij}, l_{ij} je možné zapisovat hned po výpočtu na místa, kde byly předtím prvky a_{ij}, a to v pořadí naznačeném ve schématu:

$$\begin{array}{cccccccl}
r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} & r_{1n+1} & \leftarrow & \text{1. krok} \\
l_{21} & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2n} & r_{2n+1} & \leftarrow & \text{3. krok} \\
l_{31} & l_{32} & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & \\
l_{n1} & l_{n2} & & & & & & \\
\uparrow & \uparrow & & & & & & \\
\text{2. krok} & \text{4. krok} & & & & & &
\end{array}$$

Poznámka (porovnání metod). (1) Rychlost obou metod je stejná.

(2) Trojúhelníková metoda má na rozdíl od LR-algoritmu samoopravnou schopnost, neboť matici L_0 lze volit téměř libovolně (dokonce nemusí být ani trojúhelníková).

(3) Trojúhelníková metoda má větší paměťové nároky: Jsou potřeba dvě pole o rozměrech $n \times n$ (v jednom musí být po celou dobu uložena matice soustavy). U LR-algoritmu stačí jediné pole o rozměrech $n \times n$. Je-li matice soustavy např. tridiagonální, potom může mít toto pole rozměry dokonce jen $3 \times n$.

1.1.4. *Konvergence.*

Tvrzení 1.2. Nechť je matice $A^s L_0$ silně regulární a buď $A^s L_0 = \mathcal{L}_s \mathcal{R}_s$ její rozklad na dolní trojúhelníkovou matici s jedničkami na diagonále $\mathcal{L}_s$ a horní trojúhelníkovou matici $\mathcal{R}_s$. Potom platí

$$\mathcal{L}_s = L_s, \mathcal{R}_s = R_s \dots R_1,$$

kde L_s, resp. R_s jsou příslušné členy posloupností matic (L_k), resp. (R_k) v trojúhelníkové metodě.

Důkaz. Podle (1) platí $A^s L_0 = A^{s-1} A L_0 = A^{s-1} L_1 R_1 = A^{s-2} A L_1 R_1 = A^{s-2} L_2 R_2 R_1 = \dots = L_s R_s \dots R_2 R_1$. Tvrzení vyplývá z jednoznačnosti rozkladu. □

Tvrzení 1.3. Buďte

(1) matice A^s silně regulární,
(2) (L_k), (R_k) posloupnosti matic z trojúhelníkové metody při volbě $L_0 = I$,
(3) $(\bar{L}_k)$, $(\bar{R}_k)$ posloupnosti matic z LR-algoritmu.

Potom platí $L_s = \bar{L}_1 \dots \bar{L}_s$, $R_s = \bar{R}_s$.

Důkaz. Podle (2) je

$$A^s = \underbrace{A_1 \dots A_1}_{s\text{-krát}} = \bar{L}_1 \underbrace{\bar{R}_1 \bar{L}_1}_{A_2} \bar{R}_1 \dots \bar{L}_1 \underbrace{\bar{R}_1 \bar{L}_1}_{A_2} \bar{R}_1 =$$
$$= \bar{L}_1 \bar{L}_2 \underbrace{\bar{R}_2 \bar{L}_2}_{A_3} \bar{R}_2 \dots \bar{L}_2 \underbrace{\bar{R}_2 \bar{L}_2}_{A_3} \bar{R}_2 \bar{R}_1 = \dots = \bar{L}_1 \dots \bar{L}_s \bar{R}_s \dots \bar{R}_1.$$

Položíme-li v důkazu předchozího tvrzení $L_0 = I$, vyplyne tvrzení opět z jednoznačnosti rozkladu. □

Důsledek 1.4. Konverguje-li trojúhelníková metoda při volbě $L_0 = I$, potom posloupnost (A_s) v LR-algoritmu konverguje k horní trojúhelníkové matici.

Důkaz. Podle předchozího tvrzení je $L_s = L_{s-1} \bar{L}_s$, $R_s = \bar{R}_s$. Odtud $A_s = \bar{L}_s \bar{R}_s = L_{s-1}^{-1} L_s R_s$. Podle předpokladu je $L_s \to L$, $R_s \to R$, a tak $A_s \to R$. □

Od této chvíle budeme předpokládat, že matice A má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, přičemž algebraická i geometrická násobnost každého z těchto vlastních čísel je stejná, a že platí

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|. \tag{3}$$

Podle Jordanovy věty je tedy matice A podobná diagonální matici

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

tj. existuje taková regulární matice X, že platí $A = XDX^{-1}$. Toto značení si rovněž podržme až do konce kapitoly.

Nyní rozebereme tři případy. U prvních dvou se budeme soustředit na trojúhelníkovou metodu — z předchozího důsledku je zřejmé, že konverguje-li tato metoda, konverguje i LR-algoritmus. V posledním případě trojúhelníková metoda nekonverguje, a proto se omezíme na popis chování LR-algoritmu. Napřed si ještě vyslovíme důležitou lemmu.

Lemma 1.5. Buď A matice tvaru $A = I + F$ a nechť $\|F\|$ je dostatečně malá. Potom existuje dolní trojúhelníková matice L s jedničkami na diagonále a horní trojúhelníková matice R tak, že $A = LR$, a platí $L \to I$, $R \to I$ pro $\|F\| \to 0$.

Důkaz. Bez důkazů uveďme, že jsou-li $L = (l_{ij})$, $D = (d_{ij})$, $R = (r_{ij})$ matice z trojúhelníkového rozkladu matice A, protom platí

$$l_{ij} = \frac{\det A_{ij}}{\det A_{ii}}\ (j < i),\ d_{ij} = \frac{\det A_{ii}}{\det A_{i-1i-1}}\ (j = i),\ r_{ij} = \frac{\det A_{ij}}{\det A_{jj}}\ (j > i),$$

kde A_{ij} je matice, která vznikne z A v případě $i \leq j$ vynecháním řádků $i+1, \dots, n$ a sloupců $i, i+1, \dots, j-1, j+1, \dots, n$ a v případě $i > j$ vynecháním řádků $j, j+1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ a sloupců $j+1, \dots, n$. Z definice determinantu je zřejmé, že jde o spojité funkce proměnných a_{ij} (jsou to racionální funkce, tj. podíly polynomů a ,,polynom je ta nejspojitější funkce, jaká může bejt"). To znamená, že má-li matice A rozklad, potom má rozklad i matice B, která se ,,příliš neliší"od A, a rozklad této matice B se ,,příliš neliší"od rozkladu matice A. $\square$

Tvrzení 1.6. (1) Nechť jsou všechna vlastní čísla matice A jednoduchá a různá co do absolutních hodnot (tj. všechny nerovnosti v (3) jsou ostré).
(2) Nechť jsou obě matice X, $X^{-1}L_0$ silně regulární.

Potom trojúhelníková metoda konverguje.

Důkaz. Podle předpokladu existuje jednoznačný rozklad $X^{-1}L_0 = L_Y R_Y$, kde L_Y je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále a R_Y horní trojúhelníková matice. Proto platí

$$A^s L_0 = XD^s X^{-1} L_0 = XD^s L_Y R_Y = XD^s L_Y D^{-s} D^s R_Y, \tag{4}$$

kde D^{-s} je zkrácené označení matice $(D^{-1})^s$ — tato matice určitě existuje, neboť předpokládáme, že matice A je regulární. Zkoumejme matici $D^s L_Y D^{-s}$: S využitím vět **??** a **??** dostáváme

$$[D^s L_Y D^{-s}]_{ij} = \begin{cases} 0 & j > i, \\ 1 & j = i, \\ [L_Y]_{ij} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^s & j < i. \end{cases}$$

Z předpokladu 1 vyplývá, že pro $i > j$ je $\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right| < 1$, takže prvky pod diagonálou konvergují k nule, a proto můžeme psát $D^s L_Y D^{-s} = I + F_s$, kde F_s je dolní trojúhelníková matice s nulami na diagonále. Tento vztah dosadíme do (4) a zároveň provedeme rozklad $X = L_X R_X$, kde L_X je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále a R_X horní trojúhelníková matice. Dostaneme

$$A^s L_0 = L_X R_X (I + F_s) D^s R_Y = L_X (R_X + R_X F_s) D^s R_Y = L_X (I + R_X F_s R_X^{-1}) R_X D^s R_Y.$$

Označme $G_s = R_X F_s R_X^{-1}$. Protože $F_s \overset{s\to\infty}{\longrightarrow} O$, je i $G_s \overset{s\to\infty}{\longrightarrow} O$ a pro vysoká s existuje podle lemmy 1.5 rozklad

$$I + G_s = (I + L_G^{(s)})(I + R_G^{(s)}),$$

kde $L_G^{(s)}$ je dolní trojúhelníková matice s nulami na diagonále, $L_G^{(s)} \overset{s\to\infty}{\longrightarrow} O$, a $R_G^{(s)}$ je horní trojúhelníková matice, $R_G^{(s)} \overset{s\to\infty}{\longrightarrow} O$. Získali jsme vztah

$$A^s L_0 = L_X (I + L_G^{(s)})(I + R_G^{(s)}) R_X D^s R_Y.$$

To je ovšem rozklad matice $A^s L_0$ na součin dolní trojúhelníkové matici s jedničkami na diagonále a horní trojúhelníkové matice. Protože je tento rozklad za daných předpokladů jednoznačný, musí podle tvrzení 1.2 platit $L_X(I + L_G^{(s)}) = L_s$, kde L_s je příslušná matice z posloupnosti (L_k) v trojúhelníkové metodě. Zlimicením tohoto vztahu dostaneme $L_s \to L_X$, tj. trojúhelníková metoda konverguje. $\square$

Poznámka (důsledky důkazu). (1) Z důkazu předchozího tvrzení vyplývá existence takového $p \in \mathbb{N}$, že jsou-li matice $AL_0,\ AL_1,\ \dots,\ AL_p$ silně regulární, potom je zaručena existence rozkladu (1) matic $AL_{p+1},\ AL_{p+2},\ \dots$

(2) Rychlost konvergence závisí na rychlosti konvergence $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^s \to 0,\ i > j$, tj. konvergence je tím rychlejší, čím více se liší absolutní hodnoty vlastních čísel matice A.

(3) Vlastní čísla budou na diagonále limitní matice posloupnosti (R_s) z trojúhelníkové metody srovnána podle velikosti.

Důkaz. Dokážeme poslední tvrzení: Podle (1) platí $R_s = L_s^{-1} A L_{s-1}$. Označíme-li R limitní matici posloupnosti (R_k) v trojúhelníkové metodě, potom zlimicením tohoto vztahu dostaneme

$$R = L_X^{-1} A L_X = L_X^{-1} X D X^{-1} L_X = R_X D R_X^{-1}.$$

Tvrzení vyplývá z vět **??** a **??**. □

Důsledek 1.7. Je-li splněn předpoklad 1 tvrzení 1.6 a jsou-li matice X, X^{-1} silně regulární, potom posloupnost (A_s) v LR-algoritmu konverguje k horní trojúhelníkové matici.

Důkaz. Tvrzení plyne z důsledku 1.4. □

Tvrzení 1.8. (1) Nechť má matice A jedno vlastní číslo násobné a ostatní její vlastní čísla nechť jsou jednoduchá a různá co do absolutních hodnot, tj. platí $\lambda_r = \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_t$ a jinak všechny nerovnosti v (3) jsou ostré.

(2) Nechť jsou matice $X^{-1}L_0$, $X\tilde{L}$ silně regulární (význam matice $\tilde{L}$ viz důkaz).

Potom trojúhelníková metoda konverguje.

Důkaz. Podle předpokladu existuje jednoznačný rozklad $X^{-1}L_0 = L_Y R_Y$, kde L_Y je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále a R_Y horní trojúhelníková matice. Proto opět platí (4) a

$$[D^s L_Y D^{-s}]_{ij} = \begin{cases} 0 & j > i, \\ 1 & j = i, \\ [L_Y]_{ij} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^s & j < i. \end{cases}$$

Tentokrát však k nule nekonvergují všechny prvky pod diagonálou, ale pouze ty z nich, které leží ve sloupcích $1,\ \dots,\ r-1$ nebo v řádcích $t+1,\ \dots,\ n$. Označme $\tilde{L}$ matici, která vznikne z $D^s L_Y D^{-s}$ tak, že prvky, které konvergují k nule, nahradíme nulami. Je tedy $D^s L_Y D^{-s} = \tilde{L} + \tilde{F}_s$, kde $\tilde{F}_s \to O$. Tento vztah dosadíme do (4) a zároveň provedeme rozklad $X\tilde{L} = L_X R_X$, kde L_X je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále a R_X horní trojúhelníková matice. Dostaneme

$$A^s L_0 = X(\tilde{L} + \tilde{F}_s) D^s R_Y = X\tilde{L}(I + \tilde{L}^{-1}\tilde{F}_s) D^s R_Y = L_X (I + R_X \tilde{L}^{-1} \tilde{F}_s R_X^{-1}) R_X D^s R_Y.$$

Označme $K_s = R_X \tilde{L}^{-1} \tilde{F}_s R_X^{-1}$. Protože $F_s \overset{s\to\infty}{\longrightarrow} O$, je i $K_s \overset{s\to\infty}{\longrightarrow} O$ a pro vysoká s existuje podle lemmy 1.5 rozklad

$$I + K_s = (I + L_K^{(s)})(I + R_K^{(s)}),$$

kde $L_K^{(s)}$ je dolní trojúhelníková matice s nulami na diagonále, $L_K^{(s)} \overset{s\to\infty}{\longrightarrow} O$, a $R_K^{(s)}$ je horní trojúhelníková matice, $R_K^{(s)} \overset{s\to\infty}{\longrightarrow} O$. Získali jsme vztah

$$A^s L_0 = L_X (I + L_K^{(s)})(I + R_K^{(s)}) R_X D^s R_Y.$$

Stejnou úvahou jako v důkazu tvrzení 1.6 zjistíme, že $L_s \to L_X$. □

Poznámka. Vlastní čísla budou na diagonále limitní matice posloupnosti (R_s) z trojúhelníkové metody opět srovnána podle velikosti.

Důkaz. Z (1) vyplývá $R_s = L_s^{-1} A L_{s-1}$. Zlimicením tohoto vztahu dostaneme

$$R = L_X^{-1} X D X^{-1} L_X = L_X^{-1} X \tilde{L} \tilde{L}^{-1} D \tilde{L} \tilde{L}^{-1} X^{-1} L_X = R_X (\tilde{L}^{-1} D \tilde{L}) R_X^{-1}.$$

Zkoumejme matici $\tilde{L}^{-1}D\tilde{L}$: Matice D, $\tilde{L}$ pišme v blokovém tvaru

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \lambda_r I & \\ & & D_2 \end{pmatrix}, \; \tilde{L} = \begin{pmatrix} I & & \\ & L^+ & \\ & & I \end{pmatrix},$$

kde L^+ je dolní trojúhelníková matice řádu $t - r + 1$. Potom platí

$$\tilde{L}^{-1}D\tilde{L} = \begin{pmatrix} I & & \\ & L^+ & \\ & & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \lambda_r I & \\ & & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & & \\ & L^+ & \\ & & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \lambda_r I & \\ & & D_2 \end{pmatrix} = D,$$

takže $R = R_X D R_X^{-1}$ a tvrzení opět vyplývá z vět **??** a **??**. □

Poslední případ rozebereme slovně.

(1) Nechť v (3) platí $|\lambda_r| = |\lambda_{r+1}| = \ldots = |\lambda_t|$ a ostatní nerovnosti jsou ostré.
(2) Nechť jsou matice X, X^{-1} silně regulární.
(3) Nechť $\forall s \in \mathbb{N}$ existuje rozklad $X\tilde{L}_s = L_s^* R_s^*$ a prvky matic L_s^*, R_s^* jsou omezené nezávisle na s (význam matic $\tilde{L}_s$ viz dále).
(4) Nechť $\forall s \in \mathbb{N}$ existuje rozklad $R_{22}L_s^+ = \hat{L}_s \hat{R}_s$ (význam matic R_{22}, L_s^+ viz dále).

Jak jsme předeslali, trojúhelníková metoda v tomto případě nekonverguje, a proto se omezíme na popis chování LR-algoritmu. Ten sice také nekonverguje, ale konvergovat budou alespoň některé prvky matic (A_s).

Proveďme rozklad $X^{-1} = L_Y R_Y$. Potom

$$A^s = XD^sX^{-1} = XD^sL_YR_Y = XD^sL_YD^{-s}D^sR_Y \tag{5}$$

a pro prvky matice $D^sL_YD^{-s}$ opět platí

$$[D^sL_YD^{-s}]_{ij} = \begin{cases} 0 & j > i, \\ 1 & j = i, \\ [L_Y]_{ij} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^s & j < i. \end{cases}$$

Posloupnost $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^s$ je pro $i, j \in \{r, r+1, \ldots, t\}$, $i > j$ zřejmě divergentní — členy posloupnosti „se točí" v jednotkové kružnici. Ostatní prvky pod diagonálou však konvergují k nule, a tak můžeme tentokrát psát $D^sL_YD^{-s} = \tilde{L}_s + \tilde{F}_s$, kde $\tilde{F}_s \to O$. Matice $\tilde{L}_s = D^s\tilde{L}D^{-s}$ je dolní trojúhelníková s jedničkami na diagonále a všechny její mimodiagonální prvky mají stejnou absolutní hodnotu (matice $\tilde{L}$ má stejný význam jako v důkazu předchozího tvrzení). Předchozí vztah dosadíme do (5) a provedeme rozklad podle bodu 3:

$$A^s = X(\tilde{L}_s + \tilde{F}_s)D^sR_Y = X\tilde{L}_s(I + \tilde{L}_s^{-1}\tilde{F}_s)D^sR_Y = L_s^*R_s^*(I + \tilde{L}_s^{-1}\tilde{F}_s)D^sR_Y =$$
$$= L_s^*(I + R_s^*\tilde{L}_s^{-1}\tilde{F}_sR_s^{*-1})R_s^*D^sR_Y.$$

Označme $G_s = R_s^*\tilde{L}_s^{-1}\tilde{F}_sR_s^{*-1}$. Protože $F_s \stackrel{s\to\infty}{\longrightarrow} O$, je i $G_s \stackrel{s\to\infty}{\longrightarrow} O$ a pro vysoká s existuje podle lemmy 1.5 rozklad

$$I + G_s = (I + L_G^{(s)})(I + R_G^{(s)}),$$

kde $L_G^{(s)}$ je dolní trojúhelníková matice s nulami na diagonále, $L_G^{(s)} \stackrel{s\to\infty}{\longrightarrow} O$, a $R_G^{(s)}$ je horní trojúhelníková matice, $R_G^{(s)} \stackrel{s\to\infty}{\longrightarrow} O$. Získali jsme vztah

$$A^s = L_s^*(I + L_G^{(s)})(I + R_G^{(s)})R_s^*D^sR_Y.$$

Proveďme rozklad matice $A^s = \mathcal{L}_s\mathcal{R}_s$, kde $\mathcal{L}_s$ je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále a $\mathcal{R}_s$ horní trojúhelníková matice. Z jednoznačnosti tohoto rozkladu vyplývá $\mathcal{L}_s = L_s^*(I + L_G^{(s)})$, takže pro vysoká s je $\mathcal{L}_s \approx L_s^*$ (posloupnost (L_k^*) nemusí konvergovat, proto nepíšeme $\mathcal{L}_s \to L_s^*$). Dále víme, že podle (2) je

$$A_{s+1} = \bar{L}_s^{-1}A_s\bar{L}_s = \bar{L}_s^{-1}\ldots\bar{L}_1^{-1}A_1\bar{L}_1\ldots\bar{L}_s = \mathcal{L}_s^{-1}A_1\mathcal{L}_s,$$

a tak po dosazení L_s^* za $\mathcal{L}_s$ máme

$$A_{s+1} \approx L_s^{*-1}AL_s^* = L_s^{*-1}XDX^{-1}L_s^* = L_s^{*-1}X\tilde{L}_s\tilde{L}_s^{-1}D\tilde{L}_s\tilde{L}_s^{-1}X^{-1}L_s^* =$$

$$= L_s^{*-1} L_s^* R_s^* \tilde{L}_s^{-1} D \tilde{L}_s R_s^{*-1} L_s^{*-1} L_s^* = R_s^* \tilde{L}_s^{-1} D \tilde{L}_s \tilde{R}_s^{*-1}.$$

Zbývá najít vhodné vyjádření matice R_s^*. Platí $L_s^* R_s^* = X\tilde{L}_s = L_X R_X \tilde{L}_s$. Rozdělme matice z posledního výrazu na bloky

$$L_X = \begin{pmatrix} L_{11} & & \\ L_{21} & L_{22} & \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix},\ R_X = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ & R_{22} & R_{23} \\ & & R_{33} \end{pmatrix},\ \tilde{L}_s = \begin{pmatrix} I & & \\ & L_s^+ & \\ & & I \end{pmatrix}.$$

Potom je

$$L_X R_X \tilde{L}_s = \begin{pmatrix} L_{11} & & \\ L_{21} & L_{22} & \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ & R_{22} & R_{23} \\ & & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & & \\ & L_s^+ & \\ & & I \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} L_{11} & & \\ L_{21} & L_{22} & \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12}L_s^+ & R_{13} \\ & R_{22}L_s^+ & R_{23} \\ & & R_{33} \end{pmatrix}.$$

Potíž je v tom, že blok $R_{22}L_s^+$ není diagonální. Podle bodu 4 však můžeme provést jeho rozklad $R_{22}L_s^+ = \hat{L}_s \hat{R}_s$ a odtud

$$L_s^* = L_X \begin{pmatrix} I & & \\ & \hat{L}_s & \\ & & I \end{pmatrix},\ R_s^* = \begin{pmatrix} I & & \\ & \hat{L}_s^{-1} & \\ & & I \end{pmatrix} R_X \tilde{L}_s.$$

Po dosazení dostaneme

$$A_{s+1} \approx \begin{pmatrix} I & & \\ & \hat{L}_s^{-1} & \\ & & I \end{pmatrix} R_X \tilde{L}_s \tilde{L}_s^{-1} D \tilde{L}_s (R_X \tilde{L}_s)^{-1} \begin{pmatrix} I & & \\ & \hat{L}_s^{-1} & \\ & & I \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} I & & \\ & \hat{L}_s^{-1} & \\ & & I \end{pmatrix} R_X D R_X^{-1} \begin{pmatrix} I & & \\ & \hat{L}_s & \\ & & I \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} I & & \\ & \hat{L}_s^{-1} & \\ & & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{R}_{11} & \tilde{R}_{12} & \tilde{R}_{13} \\ & \tilde{R}_{22} & \tilde{R}_{23} \\ & & \tilde{R}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & & \\ & \hat{L}_s & \\ & & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{R}_{11} & \tilde{R}_{12}\hat{L}_s & \tilde{R}_{13} \\ & \hat{L}_s^{-1}\tilde{R}_{22}\hat{L}_s & \hat{L}_s^{-1}\tilde{R}_{23} \\ & & \tilde{R}_{33} \end{pmatrix},$$

kde

$$\tilde{R}_{11} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{r-1} \end{pmatrix},\ \tilde{R}_{22} = \begin{pmatrix} \lambda_r & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_t \end{pmatrix},\ \tilde{R}_{33} = \begin{pmatrix} \lambda_{t+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Shrnutí. Posloupnost (A_s) se pro vysoká s chová takto:

(1) Diagonální prvky ve sloupcích $1, \ldots, r-1, t+1, \ldots, n$ konvergují k vlastním číslům $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1}, \lambda_{t+1}, \ldots, \lambda_n$ a prvky pod diagonálou v těchto sloupcích konvergují k nule.

(2) Ve sloupcích $r, \ldots, t$ konvergují k nule obecně pouze prvky v řádcích $t+1, \ldots, n$.

(3) Zbylá vlastní čísla jsou vlastními čísly submatice, která vznikne z matice A_s vynecháním řádků a sloupců $1, \ldots, r-1, t+1, \ldots, n$.

Poznámka. Podobná situace nastane, má-li matice A komplexně sdružené dvojice vlastních čísel, tj. existují-li vzájemně různá čísla $k_1, \ldots, k_p \in \widehat{n-1}$ tak, že $(\forall i \in \hat{p})(\lambda_{k_i} = \overline{\lambda_{k_{i+1}}})$ a jinak všechny nerovnosti v (3) jsou ostré. Potom budou matice A_s pro vysoká s „téměř diagonální", ovšem na diagonále budou mít p bločků o rozměrech 2×2, jejichž vlastními čísly budou dvojice $\lambda_{k_i}, \overline{\lambda_{k_i}}$ $(i \in \hat{p})$.