1. Částečný problém vlastních čísel

Máme nalézt jedno, popřípadě několik zpravidla v absolutní hodnotě největších vlastních čísel a případně i odpovídající vlastní vektory.

1.1. Mocninná metoda. Zvolíme $\vec{x}^{(0)}$ tak, aby $e_1^T\vec{x}^{(0)} \neq 0$. Konstruujeme posloupnosti

$$\varrho_k = \vec{e}_1^T A\vec{x}^{(k)},\ \vec{x}^{(k+1)} = \frac{1}{\varrho_k}A\vec{x}^{(k)}. \tag{1}$$

Zřejmě platí

$$\vec{x}^{(k+1)} = \frac{1}{\varrho_k\varrho_{k-1}}A^2\vec{x}^{(k-1)} = \ldots = \frac{1}{\varrho_k\varrho_{k-1}\cdots\varrho_0}A^{k+1}\vec{x}^{(0)}. \tag{2}$$

Dále, dosadíme-li první výraz v (1) do druhého výrazu tamtéž, obdržíme

$$\vec{x}^{(k+1)} = \frac{1}{e_1^T A\vec{x}^{(k)}}A\vec{x}^{(k)}. \tag{3}$$

Vynásobíme-li tuto rovnici zleva vektorem e_1^T, dostaneme

$$(\forall k \in \mathbb{N})(e_1^T\vec{x}^{(k)} = 1). \tag{4}$$

1. Nechť A má v absolutní hodnotě největší jediné vlastní číslo λ_1 s algebraickou i geometrickou násobností rovnou 1. Potom podle Jordanovy věty existuje regulární matice T tak, že platí

$$A = T^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots\end{pmatrix}T.$$

Odtud s využitím (4) a (2) plyne

$$\varrho_k = e_1^T A\vec{x}^{(k)} = \frac{e_1^T A\vec{x}^{(k)}}{e_1^T\vec{x}^{(k)}} = \frac{\varrho_{k-1}\cdots\varrho_0}{\varrho_{k-1}\cdots\varrho_0}\cdot\frac{e_1^T A^{k+1}\vec{x}^{(0)}}{e_1^T A^k\vec{x}^{(0)}} =$$

$$= \frac{e_1^T T^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^{k+1} & & \\ & J_2^{k+1} & \\ & & \ddots\end{pmatrix}T\vec{x}^{(0)}}{e_1^T T^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^{k} & & \\ & J_2^{k} & \\ & & \ddots\end{pmatrix}T\vec{x}^{(0)}} = \lambda_1\frac{e_1^T T^{-1}\begin{pmatrix}1 & & \\ & (\frac{1}{\lambda_1}J_2)^{k+1} & \\ & & \ddots\end{pmatrix}T\vec{x}^{(0)}}{e_1^T T^{-1}\begin{pmatrix}1 & & \\ & (\frac{1}{\lambda_1}J_2)^{k} & \\ & & \ddots\end{pmatrix}T\vec{x}^{(0)}}.$$

Podle věty **??** konvergují diagonální bloky k nulové matici, a tak

$$\varrho_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_1\frac{e_1^T T^{-1}\begin{pmatrix}1 & \\ & O\end{pmatrix}T\vec{x}^{(0)}}{e_1^T T^{-1}\begin{pmatrix}1 & \\ & O\end{pmatrix}T\vec{x}^{(0)}} = \lambda_1$$

za předpokladu, že $e_1^T T\vec{x}^{(0)} \neq 0$. Jednak je ale nalezení takového vektoru $\vec{x}^{(0)}$, že $e_1^T T\vec{x}^{(0)} = 0$, dosti obtížné, jednak vše spraví chyby vzniklé zaokrouhlováním. Dále podle (3) a (2) platí

$$\vec{x}^{(k)} = \frac{A\vec{x}^{(k-1)}}{e_1^T A\vec{x}^{(k-1)}} = \frac{\varrho_{k-2}\cdots\varrho_0}{\varrho_{k-2}\cdots\varrho_0}\cdot\frac{A^k\vec{x}^{(0)}}{e_1^T A^k\vec{x}^{(0)}} =$$

$$= \frac{T^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^{k} & & \\ & J_2^{k} & \\ & & \ddots\end{pmatrix}T\vec{x}^{(0)}}{e_1^T T^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^{k} & & \\ & J_2^{k} & \\ & & \ddots\end{pmatrix}T\vec{x}^{(0)}} = \frac{T^{-1}\begin{pmatrix}1 & & \\ & (\frac{1}{\lambda_1}J_2)^{k} & \\ & & \ddots\end{pmatrix}T\vec{x}^{(0)}}{e_1^T T^{-1}\begin{pmatrix}1 & & \\ & (\frac{1}{\lambda_1}J_2)^{k} & \\ & & \ddots\end{pmatrix}T\vec{x}^{(0)}}.$$

Analogicky jako výše dostaneme

$$\vec{x}^{(k)} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{T^{-1}\begin{pmatrix}1 & \\ & O\end{pmatrix}T\vec{x}^{(0)}}{e_1^T T^{-1}\begin{pmatrix}1 & \\ & O\end{pmatrix}T\vec{x}^{(0)}} \overset{\text{ozn.}}{=} \vec{y}.$$

Zjistili jsme tedy, že posloupnost $(\vec{x}^{(k)})$ konverguje. Snadno se přesvědčíme, že její limitní vektor $\vec{y}$ je vlastním vektorem matice A příslušejícím k vlastnímu číslu λ_1: Z (1) totiž vyplývá vztah $\varrho_k\vec{x}^{(k+1)} = A\vec{x}^{(k)}$ a jeho zlimicením dostáváme $\lambda_1\vec{y} = A\vec{y}$.

2. Nechť A má v absolutní hodnotě největší jediné vlastní číslo λ_1 s algebraickou i geometrickou násobností rovnou p. Potom podle Jordanovy věty existuje regulární matice T tak, že platí

$$A = T^{-1}\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1\end{matrix}}_{p\text{-krát}} & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}T$$

a chování posloupností (ϱ_k), $(\vec{x}^{(k)})$ bude podobné jako v předchozím případě, pouze s následující záměnou matic:

$$\begin{pmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}}_{p\text{-krát}} & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \end{pmatrix},$$

tj. tam, kde v bodě 1 vystupovala první matice, bude nyní vystupovat druhá.

3. Nechť A má v absolutní hodnotě největší dvě vlastní čísla $\lambda_1,\ -\lambda_1$ s algebraickou i geometrickou násobností rovnou 1. Potom podle Jordanovy věty existuje regulární matice T tak, že platí

$$A = T^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & -\lambda_1 & & \\ & & J_2 & \\ & & & \ddots\end{pmatrix}T. \tag{5}$$

Podobnou cestou jako v případě 1 dostaneme

$$\varrho_k = \frac{e_1^T T^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^{k+1} & & & \\ & (-\lambda_1)^{k+1} & & \\ & & J_2^{k+1} & \\ & & & \ddots\end{pmatrix}T\vec{x}^{(0)}}{e_1^T T^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^{k} & & & \\ & (-\lambda_1)^{k} & & \\ & & J_2^{k} & \\ & & & \ddots\end{pmatrix}T\vec{x}^{(0)}} =$$

$$= \lambda_1 \frac{e_1^T T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & (-1)^{k+1} & & \\ & & (\frac{1}{\lambda_1} J_2)^{k+1} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} T \vec{x}^{(0)}}{e_1^T T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & (-1)^{k} & & \\ & & (\frac{1}{\lambda_1} J_2)^{k} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} T \vec{x}^{(0)}}.$$

Tato posloupnost obecně diverguje, vybrané posloupnosti ϱ_{2i}, ϱ_{2i+1} však konvergují:

$$\varrho_{2i} \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_1 \frac{e_1^T T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & O \end{pmatrix} T\vec{x}^{(0)}}{e_1^T T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & O \end{pmatrix} T\vec{x}^{(0)}}, \quad \varrho_{2i+1} \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_1 \frac{e_1^T T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & O \end{pmatrix} T\vec{x}^{(0)}}{e_1^T T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & O \end{pmatrix} T\vec{x}^{(0)}}$$

a platí $\varrho_{2i}\varrho_{2i+1} \to \lambda_1^2$.

Posloupnosti $A\vec{x}^{(k)} + \lambda_1 \vec{x}^{(k)}$, resp. $A\vec{x}^{(k)} - \lambda_1 \vec{x}^{(k)}$ aproximují vlastní vektory příslušné k vlastním číslům λ_1, resp. $-\lambda_1$, i když nekonvergují. Dokážeme například, že posloupnost $A\vec{x}^{(2i)} + \lambda_1 \vec{x}^{(2i)}$ konverguje k vlastnímu vektoru přísl. k vlastnímu číslu λ_1:

Podle (1) je

$$A\vec{x}^{(2i)} + \lambda_1 \vec{x}^{(2i)} = \frac{A^2 \vec{x}^{(2i-1)} + \lambda_1 A \vec{x}^{(2i-1)}}{e_1^T A \vec{x}^{(2i-1)}} = \frac{A^{2i+1}\vec{x}^{(0)} + \lambda_1 A^{2i} \vec{x}^{(0)}}{e_1^T A^{2i} \vec{x}^{(0)}} =$$

$$= \frac{T^{-1} \left[\begin{pmatrix} \lambda_1^{2i+1} & & & \\ & (-\lambda_1)^{2i+1} & & \\ & & J_2^{2i+1} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} \lambda_1^{2i} & & & \\ & (-\lambda_1)^{2i} & & \\ & & J_2^{2i} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \right] T\vec{x}^{(0)}}{e_1^T T^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^{2i} & & & \\ & (-\lambda_1)^{2i} & & \\ & & J_2^{2i} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} T\vec{x}^{(0)}} =$$

$$= \lambda_1 \frac{T^{-1} \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 0 & & \\ & & (\frac{1}{\lambda_1} J_2)^{2i+1} + (\frac{1}{\lambda_1} J_2)^{2i} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} T\vec{x}^{(0)}}{e_1^T T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & (\frac{1}{\lambda_1} J_2)^{2i} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} T\vec{x}^{(0)}} \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda_1}{\alpha} T^{-1} \begin{pmatrix} 2 & \\ & O \end{pmatrix} T\vec{x}^{(0)}$$

a tento limitní vektor je vlastním vektorem matice A příslušejícím k vlastnímu číslu λ_1. S využitím (5) totiž dostaneme

$$A \left[\frac{\lambda_1}{\alpha} T^{-1} \begin{pmatrix} 2 & \\ & O \end{pmatrix} T\vec{x}^{(0)} \right] = \frac{\lambda_1}{\alpha} T^{-1} \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & \\ & O \end{pmatrix} T\vec{x}^{(0)} = \lambda_1 \frac{\lambda_1}{\alpha} T^{-1} \begin{pmatrix} 2 & \\ & O \end{pmatrix} T\vec{x}^{(0)}.$$

4. Nechť A má v absolutní hodnotě největší dvě vlastní čísla λ_1, $\overline{\lambda}_1$ s algebraickou i geometrickou násobností rovnou 1. Potom podle Jordanovy věty existuje regulární matice T tak, že platí

$$A = T^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \overline{\lambda}_1 & & \\ & & J_2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} T.$$

Podobně jako výše zjistíme, že posloupnosti (1) v tomto případě nekonvergují, protože se $(\frac{\overline{\lambda}_1}{\lambda_1})^k$ a $(\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^k$, $i > 1$ točí v jednotkové kružnici.

Tvrzení 1.1. Buď $t^2 + pt + q$ polynom, který má za kořeny λ_1, $\overline{\lambda}_1$. Potom

$$A^2\vec{x}^{(k)} + pA\vec{x}^{(k)} + q\vec{x}^{(k)} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \vec{o},$$

tj. pro vysoká k je soubor vektorů $(A^2\vec{x}^{(k)}, A\vec{x}^{(k)}, \vec{x}^{(k)})$ téměř lineárně závislý.

Důkaz. Platí $A^2\vec{x}^{(k)} + pA\vec{x}^{(k)} + q\vec{x}^{(k)} =$

$$= \frac{1}{e_1^T A\vec{x}^{(k-1)}}[A^3 + pA^2 + qA]\vec{x}^{(k-1)} = \frac{[A^{k+2} + pA^{k+1} + qA^k]\vec{x}^{(0)}}{e_1^T A^k \vec{x}^{(0)}} =$$

$$= \frac{T^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^{k+2} + p\lambda_1^{k+1} + q\lambda_1^k & & & \\ & \overline{\lambda}_1^{k+2} + p\overline{\lambda}_1^{k+1} + q\overline{\lambda}_1^k & & \\ & & J_2^{k+2} + pJ_2^{k+1} + qJ_2^k & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} T\vec{x}^{(0)}}{e_1^T T^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \overline{\lambda}_1^k & & \\ & & J_2^k & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} T\vec{x}^{(0)}} =$$

$$= \frac{T^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 + p\lambda_1 + q & & & \\ & (\frac{\overline{\lambda}_1}{\lambda_1})^k(\overline{\lambda}_1^2 + p\overline{\lambda}_1 + q) & & \\ & & (\frac{1}{\lambda_1}J_2)^k(J_2^2 + pJ_2 + q) & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} T\vec{x}^{(0)}}{e_1^T T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & (\frac{\overline{\lambda}_1}{\lambda_1})^k & & \\ & & (\frac{1}{\lambda_1}J_2)^k & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} T\vec{x}^{(0)}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \vec{o},$$

neboť $\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q = \overline{\lambda}_1^2 + p\overline{\lambda}_1 + q = 0$ a stále předpokládáme $e_1^T T\vec{x}^{(0)} \neq 0$. $\square$

Postup je tedy následující: Protože platí $A^2\vec{x}^{(k)} = \varrho_{k+1}\varrho_k\vec{x}^{(k+2)}$, $A\vec{x}^{(k)} = \varrho_k\vec{x}^{(k+1)}$, stačí sledovat lineární závistlost tří po sobě jdoucích členů posloupnosti $\vec{x}^{(k)}$ pro vysoké indexy k, z nich vypočítat koeficienty p, q a vlastní čísla λ_1, $\overline{\lambda}_1$ nalézt jako kořeny polynomu $t^2 + pt + q$.

Posloupnosti $A\vec{x}^{(k)} - \lambda_1\vec{x}^{(k)}$, resp. $A\vec{x}^{(k)} - \overline{\lambda}_1\vec{x}^{(k)}$ aproximují vlastní vektory příslušné k vlastním číslům $\overline{\lambda}_1$, resp. λ_1. Dokážeme první z těchto případů:

Platí $A^2\vec{x}^{(k)} + pA\vec{x}^{(k)} + q\vec{x}^{(k)} \approx \vec{o}$, přičemž $p = -(\lambda_1 + \overline{\lambda}_1)$ a $q = \lambda_1\overline{\lambda}_1$. Po dosazení dostaneme $A^2\vec{x}^{(k)} - \lambda_1 A\vec{x}^{(k)} \approx \overline{\lambda}_1 A\vec{x}^{(k)} - \lambda_1\overline{\lambda}_1\vec{x}^{(k)}$, tj. $A(A\vec{x}^{(k)} - \lambda_1\vec{x}^{(k)}) \approx$ $\approx \overline{\lambda}_1(A\vec{x}^{(k)} - \lambda_1\vec{x}^{(k)})$.

5. Nechť A má v absolutní hodnotě největší jediné vlastní číslo λ_1 s algebraickou násobností rovnou 2 a geometrickou násobností rovnou 1. Potom podle Jordanovy věty existuje regulární matice T tak,

že platí

$$A = T^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ 1 & \lambda_1 & & \\ & & J_2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} T.$$

Tentokrát dostaneme

$$\varrho_k = \frac{e_1^T T^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1^{k+1} & & & \\ (k+1)\lambda_1^k & \lambda_1^{k+1} & & \\ & & J_2^{k+1} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} T\vec{x}^{(0)}}{e_1^T T^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ k\lambda_1^{k-1} & \lambda_1^k & & \\ & & J_2^k & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} T\vec{x}^{(0)}} =$$

$$= \frac{e_1^T T^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ k+1 & \lambda_1 & & \\ & & (\frac{1}{\lambda_1}J_2)^k J_2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} T\vec{x}^{(0)}}{e_1^T T^{-1}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{k}{\lambda_1} & 1 & & \\ & & (\frac{1}{\lambda_1}J_2)^k & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} T\vec{x}^{(0)}}.$$

Poslední výraz má pro $k \to \infty$ stejnou limitu jako výraz

$$\frac{e_1^T T^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ k+1 & \lambda_1 & \\ & & O \end{pmatrix} T\vec{x}^{(0)}}{e_1^T T^{-1}\begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{k}{\lambda_1} & 1 & \\ & & O \end{pmatrix} T\vec{x}^{(0)}} = \lambda_1 \left[1 + \frac{e_1^T T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & & \\ \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \\ & & O \end{pmatrix} T\vec{x}^{(0)}}{e_1^T T^{-1}\begin{pmatrix} 1 & & \\ \frac{k}{\lambda_1} & 1 & \\ & & O \end{pmatrix} T\vec{x}^{(0)}} \right] \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_1.$$

Poznámka. Právě popsaný případ se od předchozích liší rychlostí konvergence. Ta v případech 1–4 závisela na rychlostech konvergencí $(\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^k \to 0$, $i > 1$; v případě 5 je konvergence úměrná $1/k$, tedy výrazně pomalejší. Považujeme-li 5 za 4, získáme výsledek rychleji.

Poznámka. Členy posloupnosti $(\vec{x}^{(k)})$ jsou pouhými násobky tzv. Krylovovy posloupnosti $(A^k\vec{x}^{(0)})$. Stačilo by tedy počítat členy této posloupnsoti. Přesto je i v tomto případě potřeba alespoň čas od času dělit vhodnou konstantou, aby nedošlo k přetečení nebo naopak zaokrouhlení na nulu.

1.2. **Redukční metoda.** Představte si, že znáte jedno vlastní číslo λ matice A a k němu příslušející vlastní vektor $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)^T$. Jestliže vás zajímá ještě nějaké jiné vlastní číslo (a k němu příslušející vlastní vektor) této matice, potom redukční metoda je tím, co potřebujete.

Bez újmy na obecnosti buď $u_1 \neq 0$. Označme

$$P = \begin{pmatrix} u_1 & & & \\ u_2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ u_n & & & 1 \end{pmatrix} = (\vec{u}, \vec{e}^{(2)}, \ldots, \vec{e}^{(n)}).$$

Potom

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u_1} & & & \\ \frac{-u_2}{u_1} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{-u_n}{u_1} & & & 1 \end{pmatrix}$$

a $AP = (A\vec{u},\, A\vec{e}^{(2)},\, \ldots,\, A\vec{e}^{(n)})$, odkud

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{u_1} & & & \\ \frac{-u_2}{u_1} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{-u_n}{u_1} & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \lambda_1 u_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 u_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \frac{a_{12}}{u_1} & \ldots & \frac{a_{1n}}{u_1} \\ 0 & a_{22} - \frac{u_2}{u_1} a_{12} & \ldots & a_{2n} - \frac{u_2}{u_1} a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} - \frac{u_n}{u_1} a_{12} & \ldots & a_{nn} - \frac{u_n}{u_1} a_{1n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \frac{a_{12}}{u_1} & \ldots & \frac{a_{1n}}{u_1} \\ & & & \\ \vec{o} & & B & \\ & & & \end{pmatrix},$$

přičemž B jsme označili sumbatici, která vznikne z matice $P^{-1}AP$ vynecháním prvního řádku a sloupce. Matice A je podobná matici $P^{-1}AP$, má proto stejný charakteristický polynom $|A - \lambda I| = (\lambda_1 - \lambda)\,|B - \lambda I|$. Matice B má tedy stejné spektrum jako matice A až na to, že vlastní číslo λ_1 v něm má o jedničku menší algebraickou násobnost. Speciálně, je-li λ_1 jednoduché vlastní číslo matice A, potom to není vlastní číslo matice B.

Spočteme-li (např. mocninnou metodou) nějaké vlastní číslo $\lambda_2 \neq \lambda_1$ matice B a k němu příslušející vlastní vektor $\vec{z} = (z_2,\, \ldots,\, z_n)^T$, získáme vlastní vektor matice A příslušející k vlastnímu číslu λ_2 takto: Hledejme $z_1 \in \mathbb{C}$ tak, aby $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vec{z} \end{pmatrix}$ byl vlastní vektor matice $P^{-1}AP$. Musí platit

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \frac{a_{12}}{u_1} & \ldots & \frac{a_{1n}}{u_1} \\ \vec{o} & & B & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vec{z} \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} z_1 \\ \vec{z} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 z_1 + \frac{1}{u_1}(a_{12} z_2 + \ldots + a_{1n} z_n) \\ \lambda_2 \vec{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 z_1 \\ \lambda_2 \vec{z} \end{pmatrix},$$

$$z_1 = \frac{a_{12} z_2 + \ldots + a_{1n} z_n}{(\lambda_2 - \lambda_1) u_1}.$$

Přechod od vlastního vektoru matice $P^{-1}AP$ k vlastnímu vektoru matice A je již hračkou: Stačí vztah

$$P^{-1}AP \begin{pmatrix} z_1 \\ \vec{z} \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} z_1 \\ \vec{z} \end{pmatrix}$$

vynásobit zleva maticí P a dozvíme se, že vlastním vektorem matice A příslušejícím k vlastnímu číslu λ_2 je vektor

$$P \begin{pmatrix} z_1 \\ \vec{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & & & \\ u_2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ u_n & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 u_1 \\ z_1 u_2 + z_2 \\ \vdots \\ z_1 u_n + z_n \end{pmatrix} = z_1 \vec{u} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{z} \end{pmatrix}.$$

Poznámka. K řešení úplného problému vlastních čísel se redukční metoda nehodí, neboť v praxi by se každé další vlastní číslo počítalo se stále menší přesností.