1. Iterační metody řešení soustav lineárních algebraických rovnic

1.1. Úvod.

1.1.1. *Pojem limity v lineární algebře.*

Definice 1.1. Řekneme, že posloupnost vektorů $\{\vec{x}^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, $\vec{x}^{(k)} = (x_1^{(k)},\ \ldots,\ x_n^{(k)})^T$, konverguje k vektoru $\vec{x} = (x_1,\ \ldots,\ x_n)^T$ a píšeme $\vec{x}^{(k)} \to \vec{x}$ nebo $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \vec{x}$, platí-li

$$(\forall i \in \hat{n})(\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i).$$

Řekneme, že posloupnost matic $\{A^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ typu $(m,\ n)$, $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})$, konverguje k matici $A = (a_{ij})$ typu $(m,\ n)$ a píšeme $A^{(k)} \to A$ nebo $\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = A$, platí-li

$$(\forall i \in \hat{n})(\forall j \in \hat{m})(\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}).$$

Poznámka. Přestože tato definice vypadá na první pohled jinak než definice limity posloupnosti v metrickém prostoru z matematické analýzy, jsou obě definice v daném případě ekvivalentní, jak za chvíli dokážeme. Nejprve však zavedeme následující značení norem na $\mathbb{C}^{n,1}$:

$$\|\vec{x}\|_{\mathrm{I}} = \max_{i\in\hat{n}} |x_i| \quad \text{(maximová norma)},$$

$$\|\vec{x}\|_{\mathrm{II}} = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{(součtová norma)},$$

$$\|\vec{x}\|_{\mathrm{III}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \quad \text{(eukleidovská norma)}.$$

Věta 1.2. Buďte $\{\vec{x}^{(k)}\}$ posloupnost vektorů v $\mathbb{C}^{n,1}$, $\vec{x} \in \mathbb{C}^{n,1}$.

(1) Je-li $\vec{x}^{(k)} \to \vec{x}$, potom v každé normě platí $\left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\right\| \to 0$.
(2) Platí-li v některé normě $\left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\right\| \to 0$, potom $\vec{x}^{(k)} \to \vec{x}$.

Důkaz. (1) Z definice 1.1 je zřejmé, že platí

$$\left(\vec{x}^{(k)} \to \vec{x}\right) \Rightarrow \left(\left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\right\|_{\mathrm{I}} \to 0\right).$$

Protože jsou všechny normy $\mathbb{C}^{n,1}$ ekvivalentní, platí pro libovolnou normu $\left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\right\| \leq K \left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\right\|_{\mathrm{I}} \to 0$.

(2) Z ekvivalence norem $\mathbb{C}^{n,1}$ a z definice maximové normy plyne

$$(\forall i \in \hat{n}) \left(\left|x_i^{(k)} - x_i\right| \leq \left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\right\|_{\mathrm{I}} \leq K \left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\right\| \to 0\right).$$

□

Definice 1.3. Normou na prostoru čtvercových matic n-tého řádu $\mathbb{C}^{n,n}$ nazýváme zobrazení $\|\ \|: \mathbb{C}^{n,n} \to \mathbb{R}^+$, které splňuje tyto vlastnosti:

(1) $(\forall A \in \mathbb{C}^{n,n})(\|A\| \geq 0) \wedge (\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = \vec{0})$,
(2) $(\forall \lambda \in \mathbb{C})(\forall A \in \mathbb{C}^{n,n})(\|\lambda A\| = |\lambda|\, \|A\|)$,
(3) $(\forall A,\ B \in \mathbb{C}^{n,n})(\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|)$,
(4) $(\forall A,\ B \in \mathbb{C}^{n,n})(\|AB\| \leq \|A\| \,.\, \|B\|)$.

Definice 1.4. Norma $\|\ \|_M$ na $\mathbb{C}^{n,n}$ se nazývá souhlasná s normou $\|\ \|_V$ na $\mathbb{C}^{n,1}$, jestliže platí

$$(\forall A \in \mathbb{C}^{n,n})(\forall \vec{x} \in \mathbb{C}^{n,1})(\|A\vec{x}\|_V \leq \|A\|_M \,.\, \|\vec{x}\|_V).$$

Definice 1.5. Normu $\|\ \|_M$ na $\mathbb{C}^{n,n}$ nazýváme normou generovanou (přidruženou) normou (normě) $\|\ \|_V$ na $\mathbb{C}^{n,1}$, jestliže platí

$$(\forall A \in \mathbb{C}^{n,n})(\forall \vec{x} \in \mathbb{C}^{n,1})(\|A\|_M = \max_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\|_V).$$

Poznámka. Norma generovaná je normou souhlasnou. Definice generované normy je v souhlase s definicí normy spojitého lineárního zobrazení z matematické analýzy, pouze zde vystupuje maximum místo suprema. Je tomu tak proto, že jde o supremum spojité funkce na kompaktní množině.

Důkaz. (1) Kompaktnost: Množina $\{ \vec{x} \in \mathbb{C}^{n,1} \mid \|\vec{x}\| = 1 \}$ je uzavřená a omezená, neboť je hranicí koule $B(\vec{o}, 1)$ a hranice každé množiny je uzavřená. Množina v lineárním prostoru konečné dimenze je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.

(2) Spojitost: Zobrazení $\vec{x} \mapsto \|A\vec{x}\|$ je kompozicí dvou zobrazení $A : \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ a $\| \; \| : \vec{y} \mapsto \|\vec{y}\|$. Spojitost zobrazení A byla dokázána v matematické analýze. Dokážeme, že zobrazení $\| \; \|$ je spojité, a to dokonce stejnoměrně:
Chceme dokázat, že

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^{n,1})(\|\vec{x} - \vec{y}\| < \delta \Rightarrow | \, \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \, | < \varepsilon).$$

Pro každé dva vektory $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^{n,1}$ můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\|\vec{x}\| \geq \|\vec{y}\|$. Platí-li $\|\vec{x} - \vec{y}\| < \delta$, můžeme tedy psát

$$| \, \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| \, | = \|\vec{x}\| - \|\vec{y}\| = \|\vec{x} - \vec{y} + \vec{y}\| - \|\vec{y}\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\| + \|\vec{y}\| - \|\vec{y}\| = \|\vec{x} - \vec{y}\| < \delta.$$

Nyní stačí položit $\delta = \varepsilon$.

□

1.1.2. *Princip iteračních metod.* Je dána soustava $A\vec{x} = \vec{f}$, kde A je regulární. V iteračních metodách konstruujeme iterační posloupnost vektorů $\{\vec{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$. Má-li matice A příznivé vlastnosti, konverguje tato posloupnost k řešení soustavy $\vec{x}^*$. Výchozí vektor $\vec{x}^{(0)}$ této posloupnosti se volí libovolně (nejvýhodnější ovšem je zvolit za $\vec{x}^{(0)}$ nějakou aproximaxi $\vec{x}^*$). Další členy posloupnosti se vypočítávají ze vztahu

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + H^{(k+1)}(\vec{f} - A\vec{x}^{(k)}), \tag{1}$$

kde $\{H^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ je vhodně zvolená posloupnost matic. Vektor $\vec{f} - A\vec{x}^{(k)}$ nazýváme reziduum. Navíc chceme, aby platilo

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\vec{x}^* = \vec{x}^* + H^{(k)}(\vec{f} - A\vec{x}^*)).$$

Odečtením této rovnice od (1) získáme výraz pro chybu k-té aproximace

$$\begin{aligned}\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^* &= \vec{x}^{(k-1)} - \vec{x}^* + H^{(k)}A(\vec{x}^* - \vec{x}^{(k-1)}) = (I - H^{(k)}A)(\vec{x}^{(k-1)} - \vec{x}^*) = \\ &= (I - H^{(k)}A)(I - H^{(k-1)}A)(\vec{x}^{(k-2)} - \vec{x}^*) = \ldots = \\ &= \underbrace{(I - H^{(k)}A)(I - H^{(k-1)}A) \ldots (I - H^{(1)}A)}_{\text{ozn. } T^{(k)}}(\vec{x}^{(0)} - \vec{x}^*).\end{aligned}$$

Právě jsme dokázali následující větu:

Věta 1.6. Iterační posloupnost $\{\vec{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ konverguje k řešení soustavy $A\vec{x} = \vec{f}$ při libovolné volbě $\vec{x}^{(0)}$ právě tehdy, když platí

$$\lim_{k \to \infty} T^{(k)} = O.$$

Poznámka. Iterační metody se vyznačují odolností vůči chybám vzniklým zaokrouhlováním. Tato samoopravná schopnost je dána tím, že dojde-li v při výpočtu jistého vektoru $\vec{x}^{(k)}$ iterační posloupnosti k chybě, můžeme na tento vektor pohlížet jako na výchozí člen $\vec{x}^{(0)}$ nové iterační posloupnosti.

1.1.3. *Nestacionární metody.* Iterační metody se dělí na stacionární, kde je posloupnost matic $\{H^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ konstantní, a nestacionární. Příkladem metody nestacionární budiž metoda řízené relaxace (nevyžaduje se, následující věta však bude užitečná i dále).

Věta 1.7. U soustavy lineárních alebraických rovnic s regulární maticí lze rovnice vždy přerovnat tak, aby diagonální prvky byly nenulové.

Důkaz. Plyne z definice determinantu

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi . \, a_{\pi(1)1} \ldots a_{\pi(n)n} \tag{2}$$

a z toho, že determinant regulární matice je různý od nuly. Potom totiž musí být alespoň jeden sčítanec v (2) nenulový, tj. $(\exists \pi \in S_n)(a_{\pi(1)1} \dots a_{\pi(n)n} \neq 0)$. Proto stačí dát na první místo $\pi(1)$-tou rovnici, na druhé $\pi(2)$-tou atd. $\square$

Předpokládejme, že matice soustavy $A\vec{x} = \vec{f}$ má na diagonále jedničky. Z definice rezidua je zřejmé, že je-li j-tá složka rezidua nulová, je splněna j-tá rovnice soustavy. Označme i index v absolutní hodnotě největší složky rezidua $\vec{f} - A\vec{x}^{(k)}$. (Je-li jich více, je jedno, kterou zvolíme.) Chceme, aby reziduum v následující iteraci $\vec{f} - A\vec{x}^{(k+1)}$ mělo i-tou složku rovnou nule, tj. aby platilo

$$f_i - (a_{i1}x_1^{(k+1)} + \dots + a_{ii-1}x_{i-1}^{(k+1)} + x_i^{(k+1)} + a_{ii+1}x_{i+1}^{(k+1)} + \dots + a_{in}x_n^{(k+1)}) = 0,$$

a proto klademe

$$\begin{gathered} x_i^{(k+1)} = f_i - (a_{i1}x_1^{(k)} + \dots + a_{ii-1}x_{i-1}^{(k)} + a_{ii+1}x_{i+1}^{(k)} + \dots + a_{in}x_n^{(k)}) = \\ = x_i^{(k)} + [f_i - (a_{i1}x_1^{(k)} + \dots + a_{ii-1}x_{i-1}^{(k)} + x_i^{(k)} + a_{ii+1}x_{i+1}^{(k)} + \dots + a_{in}x_n^{(k)})], \\ x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} \text{ pro } j \neq i. \end{gathered}$$

Porovnáním první z těchto dvou rovnic s (1) zjistíme, že příslušná matice $H^{(k+1)}$ má v i-tém řádku na i-tém místě jedničku a na ostatních místech nuly. Z druhé rovnice pak vyplývá, že všechny ostatní řádky matice $H^{(k+1)}$ jsou nulové. Z toho je zřejmé, že pro $k \neq l$ budou matice $H^{(k)}$, $H^{(l)}$ obecně různé.

1.2. **Stacionární metody.** Dále se budeme zabývat pouze stacionárními metodami, neboť jsou algoritmicky výhodnější a jejich chování lze snáze analyzovat.

1.2.1. *Konvergence iterační posloupnosti.* Protože ve stacionárních metodách platí $(\forall k \in \mathbb{N})(H^{(k)} = H)$, znamená to, že $(\forall k \in \mathbb{N})(T^{(k)} = (I - HA)^k)$ a kritérium konvergence z věty 1.6 přechází ve tvar

$$\lim_{k\to\infty} (I - HA)^k = O.$$

Věta 1.8. Buď $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Potom platí

$$\lim_{k\to\infty} A^k = O \Leftrightarrow \varrho(A) < 1,$$

kde $\varrho(A)$ je spektrální poloměr matice A.

Důkaz. Podle Jordanovy věty existuje regulární matice C a blokově diagonální matice

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

tak, že $A = C^{-1}JC$. Odtud $A^k = C^{-1}J^kC$, takže $A^k \to O \Leftrightarrow J^k \to O$. Zřejmě platí

$$J^k = \begin{pmatrix} J_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & J_s^k \end{pmatrix}.$$

Na cvičení se matematickou indukcí dokazovalo, že

$$J_i^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & & & & \\ \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \lambda^k & & & \\ \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \lambda^k & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \binom{k}{p-1}\lambda^{k-p+1} & \binom{k}{p-2}\lambda^{k-p+2} & \binom{k}{p-3}\lambda^{k-p+3} & \dots & \lambda^k \end{pmatrix},$$

kde p je rozměr bloku J_i a pro $i > k$ klademe $\binom{k}{i} = 0$. Odtud je zřejmé, že platí $J_i^k \to 0 \Leftrightarrow |\lambda| < 1$. $\square$

Důsledek 1.9. Iterační posloupnost (1) konverguje při libovolné volbě $\vec{x}^{(0)}$ právě tehdy, je-li $\varrho(I - HA) < 1$.

Věta 1.10. Buď $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ a nechť alespoň v jedné normě $\mathbb{C}^{n,n}$ platí $\|A\| < 1$. Potom $A^k \to O$.

Důkaz. Ze čtvrté vlastnosti maticové normy vyplývá $\left\|A^k\right\| \leq \|A\|^k$. $\square$

Důsledek 1.11. Nechť v některé maticové normě platí $\|I - HA\| < 1$. Potom iterační posloupnost (1) konverguje při libovolné volbě $\vec{x}^{(0)}$.

Věta 1.12. Absolutní hodnota každého vlastního čísla matice (spektrální poloměr) je nejvýše rovna její libovolné normě.

1.2.2. *Metoda postupných aproximací.* Rovnici $A\vec{x} = \vec{f}$ přepíšeme do tvaru

$$\vec{o} = \vec{f} - A\vec{x}$$

a k oběma stranám rovnosti přičteme $\vec{x}$. Vzniklou rovnost oindexujeme takto:

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + I(\vec{f} - A\vec{x}^{(k)}). \tag{3}$$

Porovnáním s (1) zjistíme, že při metodě postupných aproximací je $H = I$.

Konvergence. Posloupnost (3) konverguje pro každou volbu $\vec{x}^{(0)} \Leftrightarrow \varrho(I - A) < 1$, postačující podmínka je $\|I - A\| < 1$.

Lemma 1.13. Je-li $\varrho(B) < 1$, potom je matice $I - B$ regulární.

Důkaz. Buď $\varrho(B) < 1$. Na cvičení se dokazovalo, že k libovolné čtvercové matici B existují unitární matice Ω a horní trojúhelníková matice R tak, že $B = \Omega^H R\, \Omega$. Matice B je tedy podobná trojúhelníkové matici R, takže diagonální prvky matice R jsou vlastními čísly matice B. Podle předpokladu jsou všechny tyto prvky v absolutní hodnotě menší než 1. Z toho vyplývá, že $I - R$ je horní trojúhelníková matice, jejíž všechny diagonální prvky jsou nenulové. Protože ale platí $I - B = = \Omega^H \Omega - \Omega^H R\, \Omega = \Omega^H (I - R)\, \Omega$, musí být matice $I - B$ regulární. $\square$

Poznámka. Předchozí lemma zjednodušeně řečeno říká, že matice, která „se příliš neliší"od jednotkové matice, je regulární.

Lemma 1.14 („geometrická řada matic"). Buď $\varrho(B) < 1$. Potom platí

$$(I - B)^{-1} = I + B + B^2 + \ldots + B^k + \ldots,$$

tj. označíme-li $S_m = I + B + B^2 + \ldots + B^m$, potom $S_m \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} (I - B)^{-1}$.

Důkaz. Zřejmě platí $S_m(I - B) = I - B^{m+1}$. Matice $I - B$ je podle předchozí lemmy regulární, a tak můžeme tento vztah zprava vynásobit maticí $(I-B)^{-1}$. Dostaneme $S_m = (I-B)^{-1} - B^{m+1}(I-B)^{-1}$. Zlimicením získáme tvrzení. $\square$

Věta 1.15. Buď $\|\ \|$ libovolná norma $\mathbb{C}^{n,1}$ a nechť $\|\ \|$ značí i touto normou generovanou normu $\mathbb{C}^{n,n}$. Je-li $\|I - A\| < 1$, potom platí

$$\left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^*\right\| \leq \|I - A\|^k \left(\left\|\vec{x}^{(0)}\right\| + \frac{\left\|\vec{f}\right\|}{1 - \|I - A\|}\right).$$

Důkaz. Označme $B = I - A$. Potom podle (3) platí $\vec{x}^{(k)} = B\vec{x}^{(k-1)} + \vec{f} = = B(B\vec{x}^{(k-2)} + \vec{f}) + \vec{f} = B^2\vec{x}^{(k-2)} + B\vec{f} + \vec{f} = B^2\vec{x}^{(k-2)} + (B + I)\vec{f} = = B^3\vec{x}^{(k-3)} + (B^2 + B + I)\vec{f} = \ldots = B^k\vec{x}^{(0)} + (B^{k-1} + B^{k-2} + \ldots + B + I)\vec{f}$.

Pro přesné řešení platí $A\vec{x}^* = \vec{f}$, takže

$$\vec{x}^* = A^{-1}\vec{f} = (I - B)^{-1}\vec{f} = (I + B + B^2 + \ldots)\vec{f}.$$

Z předchozích dvou vztahů plyne

$$\left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^*\right\| = \left\|B^k\vec{x}^{(0)} - (B^k + B^{k+1} + B^{k+2} + \ldots)\vec{f}\right\| \le$$
$$\le \left\|B^k\right\| \left(\left\|\vec{x}^{(0)}\right\| + \left\|I + B + B^2 + \ldots\right\| \left\|\vec{f}\right\|\right) \le$$
$$\le \left\|B^k\right\| \left(\left\|\vec{x}^{(0)}\right\| + (\|I\| + \|B\| + \left\|B^2\right\| + \ldots) \left\|\vec{f}\right\|\right) \le$$
$$\le \|B\|^k \left(\left\|\vec{x}^{(0)}\right\| + (1 + \|B\| + \|B\|^2 + \ldots) \left\|\vec{f}\right\|\right) = \|B\|^k \left(\left\|\vec{x}^{(0)}\right\| + \frac{\left\|\vec{f}\right\|}{1 - \|B\|}\right).$$

□

Poznámka. Na každou stacionární iterační metodu lze pohlížet jako na metodu postupných aproximací aplikovanou na soustavu $HA\vec{x} = H\vec{f}$.

Důkaz. Postupujme stejně jako na začátku: $\vec{o} = H\vec{f} - HA\vec{x}$ a odtud

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + I(H\vec{f} - HA\vec{x}) = \vec{x}^{(k)} + H(\vec{f} - A\vec{x}).$$

□

Poznámka. V následujících dvou odstavcích budeme symbolem $(\vec{x}, \vec{y})$ označovat standardní skalární součin na $\mathbb{C}^{n,1}$. Připomeňme, že pro tento skalární součin platí $(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{y}^H\vec{x}$.

1.2.3. *Jacobiho metoda (prosté iterace).* Jednotlivé rovnice soustavy $A\vec{x} = \vec{f}$ přepíšeme tak, že z první vyjádříme x_1, ze druhé x_2 atd. Získané rovnice oindexujeme takto:

$$\begin{array}{cccccccc}
x_1^{(k+1)} & = & & -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2{}^{(k)} & -\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3{}^{(k)} & - \ \ldots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n{}^{(k)} & +\frac{f_1}{a_{11}} \\
x_2^{(k+1)} & = & -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1{}^{(k)} & & -\frac{a_{23}}{a_{22}}x_3{}^{(k)} & - \ \ldots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n{}^{(k)} & +\frac{f_2}{a_{22}} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_n^{(k+1)} & = & -\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1{}^{(k)} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2{}^{(k)} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}}x_3{}^{(k)} & - \ \ldots & & +\frac{f_n}{a_{nn}}
\end{array}$$

To je ovšem po složkách rozepsaný vztah $\vec{x}^{(k+1)} = (I - D^{-1}A)\vec{x}^{(k)} + D^{-1}\vec{f}$, kde

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Odtud vyplývá $\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + D^{-1}(\vec{f} - A\vec{x})$, takže $H = D^{-1}$.

Konvergence. Jacobiho metoda konverguje při každé volbě $\vec{x}^{(0)} \Leftrightarrow \varrho(I - D^{-1}A) < 1$, postačující podmínka je $\left\|I - D^{-1}A\right\| < 1$. Vezmeme-li maximovou normu, přejde poslední vztah ve

$$\max_{i\in\hat{n}} \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1 \Leftrightarrow (\forall i \in \hat{n}) \left(\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1\right) \Leftrightarrow (\forall i \in \hat{n}) \left(\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|\right).$$

Matice, pro které platí poslední nerovnost, nazýváme maticemi s převládající diagonálou. Jacobiho metoda tedy konverguje pro všechny matice s převládající diagonálou.

Definice 1.16. Hermitovská, resp. symetrická matice A se nazývá pozitivně definitní, jestliže pro každý vektor, resp. každý reálný vektor $\vec{x} \neq \vec{o}$ platí $(A\vec{x}, \vec{x}) > 0$.

Věta 1.17. (1) Všechna vlastní čísla pozitivně definitní matice jsou kladná.
(2) Má-li hermitovská matice všechna vlastní čísla kladná, potom je pozitivně definitní.

Důkaz. (1) Buďte A pozitivně definitní matice, λ její libovolné vlastní číslo a $\vec{x}$ libovolný k němu příslušející vlastní vektor. Vztah $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ vynásobíme skalárně vektorem $\vec{x}$ a dostaneme

$$\underbrace{(A\vec{x}, \vec{x})}_{>0} = \lambda \underbrace{(\vec{x}, \vec{x})}_{>0} \Rightarrow \lambda > 0.$$

(2) Buď A hermitovská matice, jejíž všechna vlastní čísla jsou kladná. Na cvičeních se dokazovalo, že pro každou normální (a tím spíše hermitovskou) matici A existuje unitární matice Ω a diagonální matice D tak, že $A = \Omega^H D\, \Omega$. Označíme-li $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vlastní čísla matice A, potom

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Buď $\vec{x} \neq \vec{o}$. Potom $(A\vec{x}, \vec{x}) = \vec{x}^H A\vec{x} = \vec{x}^H \Omega^H D\, \Omega\vec{x}$. Označme $\vec{y} = \Omega\vec{x}$. Je $\vec{y} \neq \vec{o}$, protože jinak by byl vektor $\vec{x}$ netriviálním řešením homogenní soustavy s regulární maticí, a platí

$$(A\vec{x}, \vec{x}) = \vec{y}^H D\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, |y_i|^2 > 0,$$

neboť všechny sčítance v sumě jsou nezáporné a alespoň jeden z nich je jistě kladný.

□

Věta 1.18. Buď A hermitovská matice s kladnými diagonálními prvky. Potom Jacobiho metoda pro soustavu $A\vec{x} = \vec{f}$ konverguje při každé volbě $\vec{x}^{(0)}$ právě tehdy, jsou-li obě matice A, $2D - A$ pozitivně definitní.

Důkaz. Dokážeme pouze nutnost podmínky. Důkaz opačné implikace se provede stejně, ale v opačném pořadí. Označme

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{a_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Je tedy $P^2 = D$. Dále platí $I - D^{-1}A = P^{-1}(I - P^{-1}AP^{-1})P$, tedy matice $I - D^{-1}A$ je podobná matici $I - P^{-1}AP^{-1}$. Tato matice je zřejmě hermitovská, a má proto všechna vlastní čísla reálná. Podle předpokladu je $\varrho(I - D^{-1}A) < 1$, a tak jsou tato čísla z intervalu $(-1, 1)$.

Buď λ vlastní číslo matice $I - D^{-1}A$. Potom existuje vektor $\vec{x} \neq \vec{o}$ takový, že $(I - D^{-1}A)\vec{x} = \lambda\vec{x}$, takže $D^{-1}A\vec{x} = (1 - \lambda)\vec{x}$. Vlastní čísla matice $D^{-1}A$ jsou tedy z intervalu $(0, 2)$. Protože platí $D^{-1}A = P^{-1}(P^{-1}AP^{-1})P$, znamená to, že matice $P^{-1}AP^{-1}$ je pozitivně definitní.

Buď $\vec{x} \neq \vec{o}$. Potom

$$(A\vec{x}, \vec{x}) = \vec{x}^H A\vec{x} = \vec{x}^H PP^{-1}AP^{-1} \underbrace{P\vec{x}}_{\text{ozn. } \vec{y}} = \vec{y}^H P^{-1}AP^{-1}\vec{y} = ((P^{-1}AP^{-1})\vec{y}, \vec{y}).$$

Stejně jako v důkaze předchozí věty dostaneme $\vec{y} \neq \vec{o}$. Podle definice 1.16 je tedy poslední výraz kladný a matice A je pozitivně definitní.

Obdobně postupujeme i při důkazu pozitivní definitnosti matice $2D - A$:

Buďte opět λ vlastní číslo matice $I - D^{-1}A$ a $\vec{x}$ příslušný vlastní vektor. Potom $(2I - D^{-1}A)\vec{x} = (1+\lambda)$, a tak jsou všechna vlastní čísla matice $2I - D^{-1}A$ z intervalu $(0, 2)$. Protože platí $2I - D^{-1}A = P^{-1}(2I - P^{-1}AP^{-1})P$, znamená to, že matice $2I - P^{-1}AP^{-1}$ je pozitivně definitní.

Buď $\vec{x} \neq \vec{o}$. Potom

$$((2D - A)\vec{x}, \vec{x}) = \vec{x}^H(2D - A)\vec{x} = \vec{x}^H PP^{-1}(2D - A)P^{-1} \underbrace{P\vec{x}}_{\text{ozn. } \vec{y}} =$$

$$= \vec{y}^H(2P^{-1}P^2P^{-1} - P^{-1}AP^{-1})\vec{y} = ((2I - P^{-1}AP^{-1})\vec{y}, \vec{y}).$$

Přitom opět $\vec{y} \neq \vec{o}$, takže podle definice 1.16 je poslední výraz kladný. Matice $2D - A$ je tedy pozitivně definitní.

□

1.2.4. *Gaussova-Seidelova metoda.* V Jacobiho metodě se všechny složky vektoru $\vec{x}^{(k+1)}$ počítají ze složek vektoru $\vec{x}^{(k)}$. Vzniká přirozená otázka, zda by se (alespoň v některých případech) nedosáhlo zlepšení, kdyby se při tomto výpočtu použily již známé složky vektoru $\vec{x}^{(k+1)}$. Touto úvahou dospějeme ke vzorcům

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1^{(k+1)} + a_{12}x_2{}^{(k)} + \ldots + a_{1n}x_n{}^{(k)} &= f_1 \\
a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{22}x_2^{(k+1)} + \ldots + a_{1n}x_n{}^{(k)} &= f_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \ldots + a_{nn}x_n^{(k+1)} &= f_n
\end{aligned}$$

Jak tyto vztahy zapsat vektorově? Ponechme si matici D z předchozího odstavce a navíc definujme

$$L = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ -a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \; R = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & -a_{1n-1} & -a_{1n} \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & 0 & -a_{n-1n} \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Potom zřejmě platí $A = -L + D - R$ a $(-L + D)\vec{x}^{(k+1)} - R\vec{x}^{(k)} = \vec{f}$, takže

$$\vec{x}^{(k+1)} = (D - L)^{-1}R\vec{x}^{(k)} + (D - L)^{-1}\vec{f}.$$

Do této rovnice dosadíme $R = D - L - A$ a dostaneme

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + (D - L)^{-1}(\vec{f} - A\vec{x}^{(k)}),$$

odkud porovnáním s (1) plyne $H = (D - L)^{-1}$.

Konvergence. Platí $I-(D-L)^{-1}A = I-(D-L)^{-1}[(D-L)-R] = (D-L)^{-1}R$. Metoda tedy konverguje při libovolné volbě $\vec{x}^{(0)} \Leftrightarrow \varrho((D - L)^{-1}R) < 1$, postačující podmínkou je $\left\|(D - L)^{-1}R\right\| < 1$.

Tvrzení 1.19. Gaussova-Seidelova metoda konverguje pro matice s převládající diagonálou.

Věta 1.20. Je-li matice soustavy pozitivně definitní, pak Gaussova-Seidelova metoda konverguje při libovolné volbě $\vec{x}^{(0)}$.

Důkaz. Buď A pozitivně definitní matice a nechť $A = -L + D - R$. Podle definice je matice A hermitovská, takže $(-L + D - R)^H = -L + D - R$. Protože $A^H = \overline{A}^T$, musí nutně platit $L = R^H$. Chceme dokázat, že $\varrho((D - R^H)^{-1}R) < 1$. Buďte λ vlastní číslo matice $(D - R^H)^{-1}R$, $\vec{x}$ k němu příslušející vlastní vektor. Vztah $(D - R^H)^{-1}R\vec{x} = \lambda\vec{x}$ vynásobíme zleva maticí $D - R^H$ a dostaneme

$$R\vec{x} = \lambda(D - R^H)\vec{x} = \lambda(A + R)\vec{x} = \lambda A\vec{x} + \lambda R\vec{x}.$$

Odtud po skalárním vynásobení vektorem $\vec{x}$ plyne

$$(R\vec{x},\, \vec{x}) = \lambda\underbrace{(A\vec{x},\, \vec{x})}_{\text{ozn. } p}+\lambda(R\vec{x},\, \vec{x}).$$

Podle definice 1.16 je $p > 0$. Položme $(R\vec{x},\, \vec{x}) = a + \mathrm{i}b$, kde $a,\, b \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lambda = \frac{a + \mathrm{i}b}{p + a + \mathrm{i}b}, \;\; |\lambda|^2 = \frac{a^2 + b^2}{(p + a)^2 + b^2}.$$

Dále platí $p = (A\vec{x},\, \vec{x}) = ((-R^H + D - R)\vec{x},\, \vec{x}) = -(R^H\vec{x},\, \vec{x}) + \underbrace{(D\vec{x},\, \vec{x})}_{\text{ozn. } d} - (R\vec{x},\, \vec{x}) = = d - (\vec{x},\, R\vec{x}) - (a + \mathrm{i}b) = d - \overline{(R\vec{x},\, \vec{x})} - (a + \mathrm{i}b) = d - (a - \mathrm{i}b) - (a + \mathrm{i}b) = d - 2a$.

Máme dokázat, že $|\lambda|^2 < 1$. Pozitivně definitní matice má všechny diagonální prvky kladné, neboť $[A]_{ii} = (A\vec{e}^{(i)},\, \vec{e}^{(i)}) > 0$. Odtud plyne $d > 0$, protože

$$d = (D\vec{x},\, \vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\, |x_i|^2\,.$$

Je tedy $(p + a)^2 = p^2 + 2pa + a^2 = p(p + 2a) + a^2 = pd + a^2$, a tak $|\lambda|^2 < 1$. $\square$

Poznámka. Gaussova-Seidelova metoda je stejně časově náročná jako Jacobiho metoda. Paměťové nároky jsou menší: Nově vypočítanými složkami vektoru $\vec{x}^{(k+1)}$ můžeme ihned přepisovat složky původní, takže je nemusíme ukládat do zvláštního pole. Obecně Gaussova-Seidelova metoda nekonverguje rychleji než Jacobiho metoda.

1.2.5. *Superrelaxační metoda (Succesive OverRelaxation method).* Výpočet vektoru $\vec{x}^{(k+1)}$ v Gaussově-Seidelově metodě můžeme chápat jako složený z n dílčích kroků, přičemž v i-tém kroku se i-tá složka vektoru $\vec{x}^{(k)}$ opraví o tolik, aby byla splněna i-tá rovnice soustavy, tj. $x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta x_i^{(k)}$, kde

$$\Delta x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}(f_i - a_{i1}x_1^{(k+1)} - \ldots - a_{ii-1}x_{i-1}^{(k+1)} - a_{ii}x_i^{(k)} - \ldots - a_{in}x_n^{(k)}).$$

Položme si otázku, zda bychom nedostali lepší metodu, kdybychom ke každé složce připočítávali jen konstantní násobek tohoto výrazu, tj. $x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega\Delta x_i^{(k)}$, kde $\omega \in \mathbb{R}$. Potom $\forall i \in \hat{n}$ platí

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}(f_i - a_{i1}x_1^{(k+1)} - \ldots - a_{ii-1}x_{i-1}^{(k+1)} - a_{ii}x_i^{(k)} - \ldots - a_{in}x_n^{(k)}),$$

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = a_{ii}x_i^{(k)} + \omega(f_i - a_{i1}x_1^{(k+1)} - \ldots - a_{ii-1}x_{i-1}^{(k+1)} - a_{ii}x_i^{(k)} - \ldots - a_{in}x_n^{(k)}),$$

$$\omega a_{i1}x_1^{(k+1)} + \ldots + \omega a_{ii-1}x_{i-1}^{(k+1)} + a_{ii}x_i^{(k+1)} =$$

$$= (1-\omega)a_{ii}x_i^{(k)} - \omega a_{ii+1}x_{i+1}^{(k)} - \ldots - \omega a_{in}x_n^{(k)} + \omega f_i.$$

To je ale po složkách rozepsaný vektorový vztah

$$-\omega L\vec{x}^{(k+1)} + D\vec{x}^{(k+1)} = (1-\omega)D\vec{x}^{(k)} + \omega R\vec{x}^{(k)} + \omega\vec{f},$$

kde matice L, D a R mají stejný význam jako v předchozím odstavci. Vynásobíme-li tento vztah zleva maticí $(D-\omega L)^{-1}$, dostaneme

$$\vec{x}^{(k+1)} = \underbrace{(D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega R]}_{\text{ozn. } \mathcal{L}_\omega}\vec{x}^{(k)} + \omega(D-\omega L)^{-1}\vec{f},$$

odkud po dosazení $R = D - L - A$ plyne

$$\vec{x}^{(k+1)} = [I - \omega(D-\omega L)^{-1}A]\vec{x}^{(k)} + \omega(D-\omega L)^{-1}\vec{f} =$$

$$= \vec{x}^{(k)} + \omega(D-\omega L)^{-1}(\vec{f} - A\vec{x}^{(k)}).$$

Je tedy $H = \omega(D-\omega L)^{-1}$. Při $\omega = 1$ přechází SOR v metodu Gaussovu-Seidelovu.

Konvergence. Platí $I - HA = I - \omega(D-\omega L)^{-1}(-L + D - R) = I - (D-\omega L)^{-1}[D - \omega L + (\omega - 1)D - \omega R] = (D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega R] = \mathcal{L}_\omega$.

Označme ϱ_ω spektrální poloměr matice $\mathcal{L}_\omega$. Superrelaxační metoda konverguje pro libovolnou volbu $\vec{x}^{(0)} \Leftrightarrow \varrho_\omega < 1$, postačující podmínka je $\|\mathcal{L}_\omega\| < 1$.

Poznámka. Je třeba nalézt nejvýhodnější hodnotu parametru ω, potřebujeme tedy nějaké kritérium, abychom mohli rozhodnout, která ze dvou iteračních metod je lepší a která horší.

Za lepší ze dvou metod považujeme tu, jejíž matice $I - HA$ má menší spektrální poloměr. Důvod je následující: Nechť je dána iterační metoda $\vec{x}^{(k+1)} = B\vec{x}^{(k)} + \vec{g}$. Pro přesné řešení musí platit $\vec{x}^* = B\vec{x}^* + \vec{g}$. Odečtením těchto dvou vztahů dostaneme

$$\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^* = B(\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^*) = B^2(\vec{x}^{(k-1)} - \vec{x}^*) = \ldots = B^{k+1}(\vec{x}^{(0)} - \vec{x}^*).$$

Protože platí $B^{k+1} = T^{-1}J^{k+1}T$, kde J a T jsou příslušné matice z Jordanovy věty, je zřejmé (viz též důkaz věty 1.8), že B^k konverguje k nulové matici stejně rychle jako $(\varrho(B))^k \to 0$.

Definice 1.21. (1) Elementární permutační maticí $I_{ij} \in \mathbb{C}^{n,n}$ nazýváme matici, která vznikne z jednotkové matice $I \in \mathbb{C}^{n,n}$ záměnou i-tého a j-tého řádku (sloupce).

(2) Permutační maticí nazveme matici, která je součinem libovolného počtu elementárních permutačních matic.

Poznámka. (1) Elementární permutační matice je symetrická a ortogonální:

$$I_{ij} = I_{ij}^T = I_{ij}^{-1}.$$

Z toho plyne, že každá permutační matice je ortogonální.

(2) Násobení libovolné matice A zleva, resp. zprava maticí I_{ij} odpovídajícího rozměru je ekvivalentní prohození i-tého a j-tého řádku, resp. sloupce matice A. Indukcí získáme toto tvrzení:

Provedeme-li libovolnou permutaci řádků, resp. sloupců matice A, je výsledek ekvivalentní násobení matice A zleva, resp. zprava permutační maticí odpovídajícího rozměru, která vznikne z I stejnou permutací řádků, resp. sloupců.

(3) Předchozí definice permutační matice je sice snadno zapamatovatelná, není z ní však na první pohled zřejmé, odkud se vzalo pojmenování této matice. Uveďme si proto jinou, s předchozí zřejmě ekvivalentní definici:

Permutační maticí nazveme takovou matici $P = (p_{ij})$, pro kterou existuje permutace $\pi \in S_n$ tak, že

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{když } \pi(i) = j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Definice 1.22. Čtvercová matice A se nazývá slabě cyklická s indexem 2, existuje-li permutační matice P taková, že matice PAP^T je blokového tvaru

$$\begin{pmatrix} O & M_1 \\ M_2 & O \end{pmatrix}, \tag{4}$$

kde diagonální bloky jsou čtvercové matice.

Poznámka. Matice je slabě cyklická s indexem 2, lze-li ji simultánní (tj. stejnou) permutací řádků a sloupců převést na blokový tvar (4).

Definice 1.23. Buď $A = -L + D - R$. Matice A se nazývá dvoucyklická, je-li matice $D^{-1}(L + R)$ slabě cyklická s indexem 2. Dvoucyklická matice se nazývá shodně uspořádaná, jestliže vlastní čísla matice $\alpha D^{-1}L + \frac{1}{\alpha}D^{-1}R$ nezávisejí na volbě čísla $\alpha \neq 0$.

Poznámka. Matice je shodně uspořádaná, jestliže se spektrum (Jacobiho) matice $D^{-1}(L+R)$ nezmění po vynásobení prvků pod diagonálou číslem α a prvků nad diagonálou číslem α^{-1}.

Věta 1.24. Má-li matice slabě cyklická s indexem 2 vlastní číslo μ, potom má i vlastní číslo $-\mu$.

Důkaz. Matice slabě cyklická s indexem 2 je podle definice podobná blokové matici (4). Má tedy i stejný charakteristický polynom

$$\begin{vmatrix} \lambda I_1 & -M_1 \\ -M_2 & \lambda I_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_1 & O \\ \frac{1}{\lambda}M_2 & I_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda I_1 & -M_1 \\ -M_2 & \lambda I_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda I_1 & -M_1 \\ O & -\frac{1}{\lambda}M_2M_1 + \lambda I_2 \end{vmatrix} =$$

$= \lambda^{s_1 - s_2}|\lambda^2 I_2 - M_2M_1|$, kde I_1 je jednotková matice typu $(s_1,\, s_1)$ a I_2 jednotková matice typu $(s_2,\, s_2)$. Poslední výraz má ovšem tu vlastnost, že když je nulován pro $\lambda = \mu$, je nulován i pro $\lambda = -\mu$. □

Věta 1.25. Buď A dvoucyklická shodně uspořádaná a nechť $\omega \neq 0$.

(1) Buď $\lambda \neq 0$ vlastní číslo matice $\mathcal{L}_\omega$ a nechť číslo μ splňuje rovnici

$$(\lambda + \omega - 1)^2 = \omega^2\mu^2\lambda. \tag{5}$$

Potom μ je vlastní číslo (Jacobiho) matice $D^{-1}(L + R)$.

(2) Buď μ vlastní číslo (Jacobiho) matice $D^{-1}(L + R)$ a nechť λ splňuje rovnici (5). Potom λ je vlastní číslo matice $\mathcal{L}_\omega$.

Je-li navíc A pozitivně definitní, potom jsou všechna vlastní čísla μ Jacobiho matice reálná, $|\mu| < 1$ (tj. $\varrho(D^{-1}(L + R)) < 1$) a SOR konverguje pro libovolnou volbu $\vec{x}^{(0)} \Leftrightarrow \omega \in (0,\, 2)$.

Definujme

$$\omega_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \mu_0^2}},$$

kde $\mu_0 = \varrho(D^{-1}(L - R))$. Pak $1 \leq \omega_0 < 2$, ϱ_ω je klesající funkcí ω v intervalu $(0,\, \omega_0\rangle$ a pro $\omega \in \langle\omega_0,\, 2)$ platí $\varrho_\omega = \omega - 1$.

Důkaz. (1) Buďte $\lambda \neq 0$ vlastní číslo matice $\mathcal{L}_\omega$, $\vec{x}$ k němu příslušející vlastní vektor. Potom platí $(D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega R]\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Tuto rovnici vynásobíme zleva maticí $D-\omega L$ a dostaneme $[(1-\omega)D+\omega R]\vec{x} = \lambda(D-\omega L)\vec{x}$, odkud $\omega(R+\lambda L)\vec{x} = (\lambda+\omega-1)D\vec{x}$. Tento vztah vynásobíme zleva maticí $\frac{1}{\sqrt{\lambda}\omega}D^{-1}$, kde $\sqrt{\lambda}$ značí libovolnou komplexní druhou odmocninu z λ. Potom

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}D^{-1}R + \sqrt{\lambda}D^{-1}L\right)\vec{x} = \underbrace{\frac{\lambda+\omega-1}{\sqrt{\lambda}\omega}}_{\text{ozn. } \mu}\ \vec{x}.$$

Číslo μ je tedy vlastním číslem matice $\sqrt{\lambda}D^{-1}L + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}D^{-1}R$. Protože je matice A shodně uspořádaná, musí být μ též vlastním číslem matice $D^{-1}L + D^{-1}R$. Tato matice je ovšem slabě cyklická s indexem 2 (matice A je dvoucyklická), a tak je jejím vlastním číslem i $-\mu$.

(2) Pro $\lambda \neq 0$, $\omega \neq 0$ se bod 2 dokáže analogicky. Pro $\lambda = 0$ připadá podle (5) v úvahu jen $\omega = 1$ a tehdy SOR přechází v Gaussovu-Seidelovu metodu, tj. $\mathcal{L}_\omega = (D-L)^{-1}R$. Máme dokázat, že $(\exists\vec{x} \neq \vec{o})((D-L)^{-1}R\,\vec{x} = \vec{o})$, tedy že matice $(D-L)^{-1}R$ je singulární. Z definice matice R je zřejmé, že R je singulární, a tak musí být singulární i $(D-L)^{-1}R$.

Položme $\omega = 1$. Potom (5) přejde v $\lambda^2 = \mu^2\lambda$, pro $\lambda \neq 0$ je tedy $\lambda = \mu^2$. Odtud $\varrho((D-L)^{-1}R) = (\varrho(D^{-1}(L+R)))^2$, takže Gaussova-Seidelova metoda konverguje, právě když konverguje Jacobiho metoda. Buď nyní A pozitivně difinitní. Potom Gaussova-Seidelova metoda konverguje při libovolné volbě $\vec{x}^{(0)}$. To ovšem — jak jsme právě dokázali — znamená, že pro libovolné $\vec{x}^{(0)}$ konverguje i Jacobiho metoda, takže musí být $\varrho(D^{-1}(L+R)) < 1$.

Platí

$$D^{-1}(L+R) = D^{-\frac{1}{2}}[D^{-\frac{1}{2}}(L+R)D^{-\frac{1}{2}}]D^{\frac{1}{2}},$$

tj. matice $D^{-1}(L+R)$ je podobná matici $D^{-\frac{1}{2}}(L+R)D^{-\frac{1}{2}}$. Protože je matice A pozitivně definitní, musí být podle definice 1.16 hermitovská. Z definice hermitovské matice je zřejmé, že hermitovská je potom i matice $L+R$ a tím pádem i matice $D^{-\frac{1}{2}}(L+R)D^{-\frac{1}{2}}$. Každá hermitovská matice má všechna vlastní čísla reálná, a tak má všechna vlastní čísla reálná i matice $D^{-1}(L+R)$.

Přepišme (5) do tvaru

$$\lambda^2 + [2(\omega-1) - \omega^2\mu^2]\lambda + (\omega-1)^2 = 0. \tag{6}$$

Každé vlastní číslo λ matice $\mathcal{L}_\omega$ je tedy kořenem kvadratické rovnice s reálnými koeficienty. Odtud ihned vyplývá:

(1) Je-li λ imaginární vlastní číslo $\mathcal{L}_\omega$, je jím i $\overline{\lambda}$ a platí $\lambda\overline{\lambda} = (\omega-1)^2$, takže $|\lambda| = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}} = |\omega-1|$.
(2) Je-li λ_1 reálné vlastní číslo $\mathcal{L}_\omega$, je jím i λ_2 takové, že $\lambda_1\lambda_2 = (\omega-1)^2$. Bez újmy na obecnosti potom platí např. $\lambda_2 \leq |\omega-1| \leq \lambda_1$.

Nutnou podmínkou pro konvergenci metody při libovolné volbě $\vec{x}^{(0)}$ je tedy $\omega \in (0, 2)$, neboť jinak by některé vlastní číslo matice $\mathcal{L}_\omega$ muselo mít absolutní hodnotu větší nebo rovnu jedné. Z bodu 1 plyne, že jsou-li všechna vlastní čísla matice $\mathcal{L}_\omega$ imaginární, potom $\varrho_\omega = |\omega-1|$. Z bodu 2 plyne, že má-li matice $\mathcal{L}_\omega$ alespoň jedno vlastní číslo reálné, potom platí $\varrho_\omega = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(\mathcal{L}_\omega) \cap \mathbb{R}\}$. Naším cílem je vhodně vyjádřit ϱ_ω v tomto druhém případě. Omezíme se tedy na reálné kořeny rovnice (5) a $\omega \in (0, 2)$.

Vztah (5) tentokrát přepíšeme takto:

$$\frac{\lambda+\omega-1}{\omega} = \pm\mu\sqrt{\lambda}.$$

Tuto rovnici řešme graficky. Jejími reálnými kořeny jsou λ-ové souřadnice průsečíků přímky $y = \frac{1}{\omega}(\lambda+\omega-1)$ s parabolou $y = \pm\mu\sqrt{\lambda}$. Přímka prochází bodem $[1, 1]$, parabola prochází počátkem a je tím otevřenější, čím je $|\mu|$ větší. Pro pevné ω získáme ϱ_ω jako větší z λ-ových souřadnic průsečíků přímky s parabolou při volbě $\mu_0 = \varrho(D^{-1}(L+R))$, tj. v případě, kdy je parabola nejotevřenější.

S rostoucím ω se bude ϱ_ω zmenšovat — přímka se bude naklánět v záporném smyslu až do chvíle, kdy se stane tečnou paraboly; tehdy položme $\omega = \omega_0$. Pro $\omega > \omega_0$ přímka s parabolou žádné průsečíky nemá a všechna vlastní čísla matice $\mathcal{L}_\omega$ jsou imaginární, tj. platí $\varrho_\omega = |\omega-1|$; ovšem jen do meze $\omega = \omega_1$, kdy se přímka dotkne paraboly „vpravo" od bodu $[1, 1]$. Potom ale zřejmě $\varrho_\omega > 1$, takže metoda nemůže konvergovat při každé volbě $\vec{x}^{(0)}$.

Nyní určíme ω_0 tak, že položíme diskriminant rovnice (6) roven nule:

$$4(\omega-1)^2 - 4(\omega-1)\omega^2\mu_0^2 + \omega^4\mu_0^4 - 4(\omega-1)^2 = 0, \qquad \omega^2\mu_0^2 - 4\omega + 4 = 0,$$

$$\omega_{1,\,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16\mu_0^2}}{2\mu_0^2} = 2 \cdot \frac{1 \pm \sqrt{1-\mu_0^2}}{\mu_0^2} = \frac{2\mu_0^2}{\mu_0^2(1 \mp \sqrt{1-\mu_0^2})}.$$

Protože musí $\omega_0 \in (0,\, 2)$, dostáváme

$$\omega_0 = \frac{2}{1+\sqrt{1-\mu_0^2}}.$$

$\square$