1. Implicitní funkce

Věta 1.1. (O inverzi) Buďte splněny tyto předpoklady

(i) $g : E \to E$, spojité na okolí $y_0 \in E$,
(ii) existuje g' na okolí y_0 spojitá v y_0,
(iii) $g'(x_0)$ je regulární,
(iv) $g(y_0) = x_0$.

Potom existuje H_{x_0} a H_{y_0} tak, že $(\forall x \in H_{x_0})(\exists_1 y \in H_{y_0})(x = g(y))$. Tj. na H_{x_0} existuje g^{-1} a platí, že $(g^{-1})'(x_0) = (g'(y_0))^{-1}$.

Věta 1.2. (O implicitních funkcích) Nechť $\Phi : \mathbb{R}^{r+m} \to \mathbb{R}^m$ a

(i) $\exists(x_0, y_0)$: $\Phi(x_0, y_0) = \Theta$,
(ii) Φ je spojité na okolí (x_0, y_0),
(iii) $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ existuje na okolí (x_0, y_0) a je spojitá v (x_0, y_0),
(iv) $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0, y_0)$ je regulární.

Pak

$$(\exists H_{x_0},\ H_{y_0})(\forall x \in H_{x_0})(\exists_1 y \in H_{y_0})(\Phi()x, y) = \Theta.$$

Vzniknuvší funkce (označme ji $Y = Y(x)$) je spojitá na H_{x_0}. Pokud Φ' existuje na okolí (x_0, y_0) pak i Y' existuje na H_{x_0}.

Příklad 1.1. *Mějme zadanou množinu bodů splňujících vztah $x + y + z = e^z$, kde $x + y > 1$ a $z > 0$. Ptáme se, zda existuje závislost $z = z(x, y)$.*

Příklad 1.2. *Máme zadáno $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ po složkách takto:*

$$\Phi^1(x, y, u, v) = x + y^2 + u^3 - u - v = 0,$$
$$\Phi^2(x, y, u, v) = x^2 - 3y + u - 2v + 4 = 0.$$

Existují závislosti $u = u(x, y)$ a $v = v(x, y)$?

Příklad 1.3. *Je zadán vztah $y - \epsilon \sin y = x$, kde $\epsilon \in (0, 1)$. Existuje závislost $y = y(x)$?*

Poznámka 1.1. Věta o inverzi zaručuje lokální invertovatelnost. Nic víc.

Příklad 1.4. *Je zadána $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vztahem*

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix},$$

kde $x, y > 0$. Existuje F^{-1}?

1.1. Extrémy implicitně zadaných funkcí.

V následujících příkladech využijeme vědomostí nabytých o implicitních funkcích jakožto i minulého semestru.

Příklad 1.5. *(*Dĕmidovič 3651.*) Najděte extrémy funkce $z = z(x, y)$ implicitně definované vztahem*

$$x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0.$$

Příklad 1.6. *(*Dĕmidovič 3652.*) Najděte extrémy funkce $z = z(x, y)$ implicitně definované vztahem*

$$x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0.$$

Příklad 1.7. *(*Dĕmidovič 3653.*) Najděte extrémy funkce $z = z(x, y)$ implicitně definované vztahem*

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2).$$