1. Holomorfní funkce

Definice 1.1. Funkci $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nazveme **holomorfní v bodě** x, když je diferencovatelná na nějakém jeho okolí. Funkce se nazývá **holomorfní na množině** M, jestliže je holomorfní v každém jejím bodě.

Poznámka. Funkce sin, cos, exp jsou holomorfní na $\mathbb{C}$. Mocninné řady jsou holomorfní uvnitř kruhu konvergence.

Věta 1.2. Funkce zobrazující do $\mathbb{R}$ a holomorfní na souvislé množině $M \subset \mathbb{C}$ je na této množině konstantní.

Důkaz. Při použití zavedeného značení můžeme psát $f_2 = 0$. Z Cauchyho–Riemannových podmínek plyne, že v každém bodě platí $\partial_x f_1 = 0$ a $\partial_y f_1 = 0$. Víme, že funkce f_1 je diferencovatelná a její derivací je nulové zobrazení. Proto je na množině M konstantní. □

V základních výsledcích komplexní analýzy figurují křivkové integrály komplexních funkcí komplexní proměnné. Než budeme pokračovat, musíme tyto integrály definovat. Nejprve se naučíme integrovat reálnou funkci, která zobrazuje do $\mathbb{C}$.

Definice 1.3. Buď $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Pak definujeme

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathbf{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t + \mathbf{i}\int_a^b \mathbf{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t,$$

pokud oba integrály na pravé straně existují.

Nyní už můžeme definovat křivkový integrál. I když by bylo možné zavést integrál z velmi obecných funkcí, pro naše účely bude stačit pracovat s funkcemi, které jsou spojité.

Definice 1.4. Buď $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ dráha třídy $\mathcal{C}^1$, $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funkce spojitá na $\langle\varphi\rangle$. Pak klademe

$$\int_\varphi f = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Jestliže je dráha pouze po částech hladká, definujeme integrál jako součet přes všechny části, kde je hladká.

Poznámka. Existuje-li k f primitivní funkce F na $\langle\varphi\rangle$, tj. $\forall z \in \langle\varphi\rangle$ platí $f(z) = F'(z)$, pak

$$\int_\varphi f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (F\circ\varphi)'(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Integrál přes uzavřenou křivku by tedy byl nutně nulový.

Příklad. Spočítejme hodnotu integrálu, který hraje v komplexní analýze významnou roli. Nechť φ je jakákoliv kružnice se středem z_0 probíhaná v kladném smyslu konstantní rychlostí, tj. $\varphi(t) = re^{\mathbf{i}t} + z_0$, $t \in [-\pi, \pi]$. Pak

$$\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathbf{i}}{re^{\mathbf{i}t}} re^{\mathbf{i}t}\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathbf{i}.$$

Všimněme si, že funkce $\frac{1}{z}$, kterou jsme integrovali, „skoro“ má primitivní funkci – logaritmus. Přesto integrál přes uzavřenou křivku není nulový. Logaritmus je totiž nespojitý na přímce P_π. Dokonce není těžké ukázat, že skok mezi hodnotami logaritmu na polorovinách oddělených P_π je roven právě $2\pi\mathbf{i}$.

Definice 1.5. Buď φ po částech hladká uzavřená dráha, nechť $z_0 \notin \langle\varphi\rangle$. **Index bodu** z_0 **vzhledem k** φ definujeme vztahem

$$\operatorname{ind}_\varphi z_0 = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}.$$

Index je tedy definován pro každý bod, který neleží na křivce φ. Nevinně vyhlížející integrál nás překvapí svými vlastnostmi: Jeho hodnota je vždy celé číslo! Jeho význam lze vyjádřit geometricky. Udává, kolikrát křivka φ oběhla bod z_0 v kladném smyslu. Dá se tedy například ukázat, že platí

$$\operatorname{int}\varphi = \{z \in \mathbb{C} \smallsetminus \langle\varphi\rangle \mid \operatorname{ind}_\varphi z \neq 0\}, \quad \operatorname{ext}\varphi = \{z \in \mathbb{C} \smallsetminus \langle\varphi\rangle \mid \operatorname{ind}_\varphi z = 0\}.$$

Než budeme pokračovat dál, připomeňme definici Jordanovy dráhy – viz definice **??**. Nyní, když už máme k dispozici definici indexu bodu, jsme schopni definovat kladnou orientaci. Aby ale tato definice měla nějaký smysl, museli bychom ukázat, že znamená právě to, co si pod ní představujeme, tj. procházení dráhy proti směru hodinových ručiček. To dělat nebudeme. Stejně tak nebudeme dokazovat ani korektnost definice, tedy nezávislost na volbě bodu z_0.

Definice 1.6. Buď φ uzavřená Jordanova dráha, nechť $z_0 \in \operatorname{int}\varphi$. Říkáme, že dráha φ je **orientována kladně**, právě když $\operatorname{ind}_\varphi z_0 > 0$.

Nyní přichází na řadu extrémně silná věta, z níž další výsledky v komplexní analýze vyplývají velmi snadno. Tuto větu ale bohužel dokážeme pouze za značně zesílených předpokladů.

Věta 1.7 (Cauchyho integrální)**.** Buď φ po částech hladká Jordanova dráha a f funkce holomorfní na $\operatorname{int}\varphi$ a spojitá na $\overline{\operatorname{int}\varphi}$. Pak

$$\oint_\varphi f = 0.$$

Důkaz. Důkaz provedeme pouze za silnějšího předpokladu $f \in \mathcal{C}^1$. Později sice ukážeme, že tento předpoklad splňuje každá holomorfní funkce (ba co víc, každá holomorfní funkce je dokonce třídy $\mathcal{C}^\infty$), ale v důkazu použijeme právě Cauchyho integrální větu, takže provedeme důkaz kruhem. Dokázat Cauchyho větu v plném znění dá mnohem víc práce a pan tajemník přiznává, že na to nemá čas.

Předpokládáme-li tedy $f \in \mathcal{C}^1$ a označíme-li $\varphi = \varphi_1 + \mathbf{i}\varphi_2$, pak s užitím Greenovy věty získáme:

$$\begin{aligned}\oint_\varphi f(z) &= \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (f_1\varphi_1' - f_2\varphi_2')\mathrm{d}t + \mathbf{i}\int_a^b (f_1\varphi_2' + f_2\varphi_1')\mathrm{d}t = \\ &= \int_a^b (f_1, -f_2)(\varphi_1', \varphi_2')\mathrm{d}t + \mathbf{i}\int_a^b (f_2, f_1)(\varphi_1', \varphi_2')\mathrm{d}t = \int_\varphi \overrightarrow{(f_1, -f_2)} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \mathbf{i}\int_\varphi \overrightarrow{(f_2, f_1)} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \\ &= \iint_{\operatorname{int}\varphi} \underbrace{\left(-\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x}\right)}_{0} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathbf{i}\iint_{\operatorname{int}\varphi} \underbrace{\left(-\frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial x}\right)}_{0} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.\end{aligned}$$ □

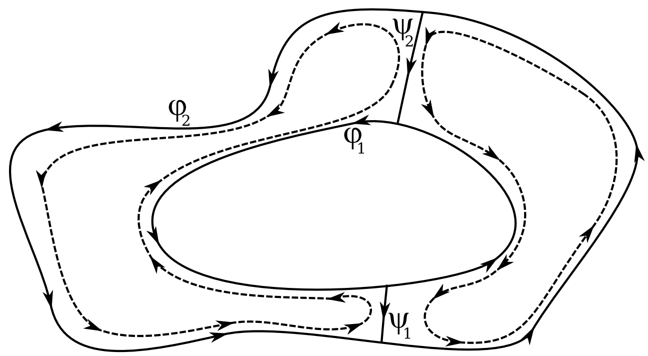
Věta 1.8 (princip deformace dráhy)**.** Buďte φ_1, φ_2 stejně orientované po částech hladké Jordanovy dráhy. Nechť $\langle\varphi_1\rangle \subset \operatorname{int}\varphi_2$. Buď dále f holomorfní na $\operatorname{int}\varphi_2 \smallsetminus \overline{\operatorname{int}\varphi_1}$ a spojitá na $\overline{\operatorname{int}\varphi_2} \smallsetminus \operatorname{int}\varphi_1$. Pak

$$\oint_{\varphi_2} f = \oint_{\varphi_1} f.$$

Důkaz. Dráhy φ_1 a φ_2 se spojí pomocí drah ψ_1, ψ_2 mezi nimi, viz obrázek. (Bylo by potřeba zdůvodnit, proč je vždy možné nalézt takové dráhy, které φ_1 a φ_2 neprotnou, ale pouze spojí; intuitivně je to ale jasné. Argumentovat bychom mohli třeba tím, že $\langle\varphi_1\rangle$ a $\langle\varphi_2\rangle$ jsou kompakty, a proto existují body, v nichž je jejich vzdálenost minimální. Vrána to ale po nás stejně nebude chtít.)

Napřed se udělá integrál přes levou část, potom přes pravou. Oba tyto integrály jsou podle Cauchyho integrální věty nulové. Jejich součet je přitom roven rozdílu obou integrálů, které nás zajímají – křivky ψ_1, ψ_2 se projdou tam a zpět, takže se jejich příspěvky odečtou, φ_1 byla integrována proti směru, proto vyjde záporně. Proto opravdu platí

$$\oint_{\varphi_2} f - \oint_{\varphi_1} f = 0.$$ □



Obrázek 1. Princip deformace dráhy

Věta 1.9 (Cauchyho integrální vzorec)**.** Buď φ po částech hladká Jordanova dráha a nechť f je holomorfní na $\operatorname{int}\varphi$ a spojitá na $\overline{\operatorname{int}\varphi}$. Pak pro každé $z \in \operatorname{int}\varphi$ platí

$$f(z) = \frac{\operatorname{ind}_\varphi z}{2\pi\mathbf{i}} \oint_\varphi \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi.$$

Důkaz. Nejdříve převedeme uvedený integrál na integrál z téže funkce přes jednodušší křivku – kladně orientovanou kružnici se středem v z. Protože je $\operatorname{int}\varphi$ otevřená množina, existuje takové $r \in \mathbb{R}^+$, že $\psi(t) = z + re^{\mathbf{i}t}$ splňuje $\langle\psi\rangle \in \operatorname{int}\varphi$. S využitím principu deformace dráhy tedy můžeme psát

$$\int_\varphi \frac{f(\xi)}{\xi - z} = \operatorname{ind}_\varphi(z) \int_\psi \frac{f(\xi)}{\xi - z} = \operatorname{ind}_\varphi(z) \int_\psi \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi + \operatorname{ind}_\varphi(z) \int_\psi \frac{f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi.$$

Druhý z integrálů převedeme vytknutím konstanty $f(z)$ na integrál, který známe – dostaneme tedy $f(z) \cdot 2\pi\mathbf{i} \cdot \operatorname{ind}_\varphi(z)$. Věta by proto byla dokázána, kdybychom mohli zdůvodnit, že je první z integrálů nulový.

Integrand splňuje $\lim_{\xi\to z} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z} = f'(z)$, lze tedy nalézt okolí, na němž je omezen třeba konstantou $2\,|f'(z)| = M$. BÚNO předpokládejme, že kružnice ψ v tomto okolí leží (v opačném případě bychom použili menší kružnici). Pak platí

$$\left| \int_\psi \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \right| \leq M2\pi r.$$

Jenže integrál přes všechny kružnice ležící uvnitř $\langle\varphi\rangle$ je stejný. Zmenšováním kružnice proto můžeme ukázat, že je menší než libovolné ε, a tedy nulový. $\square$

Příklad. Počítejme integrál $\int_\varphi \frac{\sin z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$.

(1) Předpokládejme nejprve $\mathbf{i}, -\mathbf{i} \in \operatorname{ext}\varphi$. Pak $\oint_\varphi = 0$, protože integrujeme holomorfní funkci.

(2) Nyní zkoumejme případ $\mathbf{i} \in \operatorname{int}\varphi$, $-\mathbf{i} \in \operatorname{ext}\varphi$. Potom

$$\oint_\varphi = \frac{1}{2\mathbf{i}} \oint_\varphi \left(\frac{\sin z}{z - \mathbf{i}} - \frac{\sin z}{z + \mathbf{i}} \right) = \pi \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \oint_\varphi \frac{\sin z}{z - \mathbf{i}} - \frac{1}{2\mathbf{i}} \oint_\varphi \frac{\sin z}{z + \mathbf{i}} = \pi \sin \mathbf{i},$$

protože první integrál vyjadřuje hodnotu $\sin \mathbf{i}$ pomocí Cauchyho integrálního vzorce a druhý je nulový, neboť integrujeme holomorfní funkci.

(3) Ostatní případy by šlo vyřešit podobně.

Věta 1.10. Buď funkce f holomorfní na kruhu $B(z_0, R)$. Pak pro každé $z \in B$ platí

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

kde

$$a_n = \frac{\operatorname{ind}_\varphi z_0}{2\pi \mathbf{i}} \oint_\varphi \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}\xi$$

pro libovolnou Jordanovu dráhu φ takovou, že $\langle \varphi \rangle \subset B$ a $z_0 \in \operatorname{int} \varphi$.

Důkaz. Buď $z \in B(z_0, R)$. Potom existuje φ kladně orientovaná dráha taková, že $z \in \operatorname{int} \varphi$ a zároveň splňující předpoklady věty ($B(z_0, R)$ je otevřená). S využitím znalosti součtu geometrické řady můžeme psát

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int_\varphi \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int_\varphi \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} \, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int_\varphi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n \mathrm{d}\xi =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi \mathbf{i}} \int_\varphi \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}\xi \right) (z - z_0)^n.$$

Ověříme korektnost záměny sumy a integrálu: platí, že

$$\left| \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^n} \right| \leq M r^n,$$

kde M je kladná konstanta omezující $\frac{f(\xi)}{\xi - z_0}$ (ta existuje, protože f je spojité a vzdálenost bodů φ od z_0 je nenulová) a pro $r \in \mathbb{R}$ platí $\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \leq r < 1 \right|$, protože $z \in \operatorname{int} \varphi$. Řada má konvergentní číselnou majorantu, je tedy podle Weierstrassovy věty stejnoměrně konvergentní a záměna je korektní. $\square$

Věta 1.11. Za splnění předpokladů předchozí věty platí:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi \mathbf{i}} \operatorname{ind}_\varphi(z_0) \oint_\varphi \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}\xi,$$

n-tou derivaci holomorfní funkce lze tedy vyjádřit jako křivkový integrál.

Důsledek. Funkce, která je na $B(z_0, R)$ holomorfní, je na $B(z_0, R)$ dokonce třídy $\mathcal{C}^\infty$. Také je na tomto kruhu **analytická** – to znamená, že ji lze na okolí každého bodu vyjádřit jako součet mocninné řady.

Chceme-li určit poloměr konvergence mocninné řady, která na nějakém kruhu konverguje k funkci, již známe, stačí spočítat vzdálenost středu od nejbližšího bodu, ve kterém funkce není holomorfní. Naše dřívější metody, jak poloměr určovat, byly – podle slov pana tajemníka – „úplně směšný“.