1. Parametrické integrály

Definujme funkci $F : A \mapsto \mathbb{R}$ vztahem

$$F(\alpha) = \int\limits_M f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x.$$

Analogie $F(\alpha) = \int_M f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x$ a $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \leftrightarrow n$, $\alpha \leftrightarrow x$.

$$F(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\alpha) = \int\limits_M f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x$$

Věta 1.1 (o spojitosti)**.** Buď $M \subset \mathbb{R}^n$, (P,ϱ) metrický prostor, $A \subset P$, $f : M \times A \mapsto \mathbb{R}$ a nechť platí:

(I) Pro skoro všechna $x \in M$

$$f(x,\ ,) \in \mathcal{C}^0(A)$$

(II) $(\forall \alpha \in A)(f(\ ,\alpha)$ je měřitelná na $M)$,

(III) $(\exists g \in \mathcal{L}(M))($pro skoro všechna $x \in M)(\forall \alpha \in A)(|f(x,\alpha)| \le g(x))$.

Potom

$$F(\alpha) = \int\limits_M f(x,\alpha) \in \mathcal{C}^0(A).$$

Důkaz. Buď jde o izolované body (které jsou body spojitosti z definice), nebo platí následující věta o limitě, což dokazuje spojitost. □

Věta 1.2 (o limitě)**.** Buď $M \subset \mathbb{R}^n$, (P,ϱ) metrický prostor, $A \subset P$, $\alpha_0 \in A'$, $f : M \times A \mapsto \mathbb{R}$ a nechť platí:

(I) Pro skoro všechna $x \in M$

$$\lim_{\substack{\alpha\to\alpha_0\\ \alpha\in A}} f(x,\alpha) = \varphi(x),$$

(II) $(\forall \alpha \in A \setminus \{\alpha_0\})(f(\ ,\alpha)$ je měřitelná na $M)$,

(III) $(\exists g \in \mathcal{L}(M))($pro skoro všechna $x \in M)(\forall \alpha \in A \setminus \alpha_0)(|f(x,\alpha)| \le g(x))$.

Potom

(i) $\varphi \in \mathcal{L}(M)$,

(ii)

$$\int\limits_M \varphi = \lim_{\substack{\alpha\to\alpha_0\\ \alpha\in A}} \int\limits_M f(x,\alpha).$$

Důkaz. Heineova věta: $\lim \alpha_n = \alpha_0$, $\alpha_n \in A \setminus \{\alpha_0\}$, $\varphi_n(x) = f(x,\alpha_n) \to \varphi(x)$. $\varphi_n(x)$ je měřitelná na M, z Lebesgueovy věty plyne, že $\varphi \in \mathcal{L}(M)$. Pro libovolnou posloupnost α_n platí

$$\int\limits_M \varphi = \lim_{n\to\infty} \int\limits_M f(x,\alpha_n)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\alpha\to\alpha_0\\ \alpha\in A}} \int\limits_M f(x,\alpha).$$

□

Věta 1.3 (o derivaci)**.** Buď M měřitelná množina, $M \subset \mathbb{R}^n$ a nechť $\mathcal{I} = \mathcal{I}^\circ \subset \mathbb{R}$. Nechť $f : M \times \mathcal{I} \mapsto \mathbb{R}$ je reálná funkce a platí:

(I) Existuje $\alpha_0 \in \mathcal{I}$ takové, že $f(\ ,\alpha_0) \in \mathcal{L}(M)$,

(II) pro každé $\alpha \in \mathcal{I}$ platí, že $f(\ ,\alpha)$ je měřitelná na M,

(III) je-li $N \subset M$, $\mu(N) = 0$, pak $f(x,\ )$ je diferencovatelná na $\mathcal{I}$ pro každé $x \in M \setminus N$,

(IV) existuje $g \in \mathcal{L}(M)$ tak, že

$$(\forall x \in M \setminus N)(\forall \alpha \in \mathcal{I})\left(\left|\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\right| \le g(x)\right).$$

Potom

(i) $f(\ ,\alpha) \in \mathcal{L}(M)$ pro každé $\alpha \in \mathcal{I}$,
(ii) $\frac{\partial}{\partial\alpha} f(\ ,\alpha) \in \mathcal{L}(M)$ pro každé $\alpha \in \mathcal{I}$,
(iii) a platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} \int_M f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x = \int_M \frac{\partial}{\partial\alpha} f(x,\alpha)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. (1) Buď $x \in M \setminus N$, pak

$$f(x,\alpha) - f(x,\alpha_0) = \frac{\partial f}{\partial\alpha}(x,\xi)\,|\alpha - \alpha_0|\,,$$

takže

$$|f(x,\alpha)| \le \underbrace{|f(x,\alpha_0)|}_{\in\mathcal{L}(M)} + \underbrace{g(x)(\alpha-\alpha_0)}_{\in\mathcal{L}(M)},$$

kde α je pevné.

(2) Pro $\alpha \in \mathcal{I}$

$$\frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h} = \int_M \underbrace{\frac{f(x,\alpha+h)-f(x,\alpha)}{h}}_{\psi(x,h)}\,\mathrm{d}x.$$

Použijeme minulou větu, $A = \{h \mid \alpha + h \in \mathcal{I}\}$, $0 \in A'$. Limita

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in A}} \int_M \psi(x,h)$$

existuje a je záměnná, neboť pro $x \in M \setminus N$ platí $|\psi(x,h)| = \left|\frac{\partial f(x,\xi_{x\alpha})}{\partial\alpha}\right| \le g(x)$.

□

Poznámka. Co kdyby meze závisely na α?

$$F(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)$$

$f, \frac{\partial f}{\partial\alpha} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2)$, $a(\alpha), b(\alpha) \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I}_2)$, $(a(\mathcal{I}_1), b(\mathcal{I}_2)) \subset \mathcal{I}_1$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\int_{a(\alpha)}^{a(\alpha_0)} + \int_{a(\alpha_0)}^{b(\alpha_0)} + \int_{b(\alpha_0)}^{b(\alpha)}\right) =$$

$$= f(b(\alpha),\alpha)b'(\alpha) - f(a(\alpha),\alpha)a'(\alpha) + \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,\mathrm{d}x.$$

Pomůcka pro zapamatování:

$$\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha) = F(a(\alpha), b(\alpha), \alpha),$$

$\frac{\partial f}{\partial\alpha}$ podle derivace složené funkce.

Věta 1.4 (o integraci)**.** Buď $M \subset \mathbb{R}^n$ měřitelná, $N \subset \mathbb{R}^m$ měřitelná a $f : M \times N \mapsto \mathbb{R}$ měřitelná funkce. Nechť alespoň jeden z integrálů

$$\int_M \left(\int_N |f(x,y)|\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \qquad \int_N \left(\int_M |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

konverguje. Pak
$$\int\limits_M \left(\int\limits_N f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_N \left(\int\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Důkaz. $f \in \mathcal{M} \Rightarrow |f| \in \Lambda$. Z Fubiniho je pak též $|f| \in \mathcal{L}$, což je majoranta f a zbytek plyne z Fubiniho. □

Poznámka. Předcházející věta představuje zobecnění Fubiniovy věty. Povšimněte si, že v předpokladech nemusí platit $f \in \Lambda$, stačí pouze měřitelnost.

Definice 1.5. Buď $p, q > 0$. Potom **Eulerův integrál druhého druhu** je integrál ve tvaru
$$\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x$$
a **Eulerův integrál prvního druhu** je integrál ve tvaru
$$\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x.$$

Funkce gama je Eulerův integrál druhého druhu jako funkce p, tj.
$$\mathbf{\Gamma}(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Funkce beta je Eulerův integrál prvního druhu jako funkce p, q, tj.
$$\mathbf{B}(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka.
1. Dříve se tyto funkce zaváděly jako elementární. S nástupem výpočetní techniky a softwaru to již není třeba.
2. Podmínka $p, q > 0$ je proto, aby integrály konvergovaly. Zajímavé je, že na konvergenci je třeba zobecněný Riemannův integrál, ale Lebesgeův integrál pouze obyčejný.

Věta 1.6. Funkce beta je symetrická ve svých argumentech, tj. $\mathbf{B}(p,q) = \mathbf{B}(q,p)$.

Důkaz.
$$\mathbf{B}(p,q) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{+\infty} = \int\limits_0^1 \frac{t^{p-1} + t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}.$$
V 1. kroku se použila substituce $x = t/(t+1)$, ve 2. kroku na druhý integrál $x = 1/t$. □

Věta 1.7.
$$\mathbf{B}(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$
pro $p \in (0,1)$

Důkaz.
$$\mathbf{B}(p,1-p) = \int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x} + \int\limits_0^1 \frac{x^{(1-p)-1}}{1+x} = \int\limits_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{p+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n-p} \right) \mathrm{d}x =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{p+n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n-p+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{p+n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n-p} =$$
$$= \left[\frac{1}{\pi p} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\pi p + \pi n} + \frac{1}{\pi p - \pi n} \right) \right] \pi = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

Korektnost postupu: Na záměnu nemůžu použít Leviovu větu kvůli $(-1)^n$. Pro $x \in (0,1)$ platí

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{\alpha-1+n} = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{\alpha-1+k} = \int_0^1 \lim x^{\alpha-1} \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x},$$

pro $\alpha \in (0,1)$ je $x^{\alpha-1}$ integrabilní majorantou, takže integrál konverguje a podle Lebesgueovy věty lze zaměnit. □

Věta 1.8.

$$\mathbf{B}(p,q) = \frac{\mathbf{\Gamma}(p)\mathbf{\Gamma}(q)}{\mathbf{\Gamma}(p+q)}.$$

Důkaz.

$$\mathbf{\Gamma}(\beta) = \int_0^{+\infty} x^{\beta-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \alpha^\beta \int_0^{+\infty} t^{\beta-1} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t.$$

Položím $\beta = p+q$, $\alpha = 1+y$. Pak

$$\mathbf{\Gamma}(p+q) = (1+y)^{p+q} \int_0^{+\infty} t^{p+q-1} e^{-(1+y)t}\,\mathrm{d}t$$

vynásobí se to $\cdot \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}$ a zintegruje přes y od 0 do ∞

$$\mathbf{B}(p,q)\mathbf{\Gamma}(p+q) = \underbrace{\int_0^{+\infty} \left(y^{p-1} \int_0^{+\infty} t^{p+q-1} e^{-(1+y)t}\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}y}_{\text{integrál konverguje a je} \geq 0\text{, lze zaměnit}} = \int_0^{+\infty} \left(t^{p+q-1} e^{-t} \underbrace{\int_0^{+\infty} y^{p-1} e^{-yt}\,\mathrm{d}y}_{\frac{1}{t^p}\mathbf{\Gamma}(p)} \right) \mathrm{d}t =$$
$$= \mathbf{\Gamma}(q)\mathbf{\Gamma}(p),$$

za použití vzorce $\mathbf{\Gamma}(\beta)$. □

Poznámka.

$$\mathbf{B}(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} = \mathbf{\Gamma}(p)\mathbf{\Gamma}(1-p).$$

Po rozšíření pro záporná p (viz poznámky za další větou) platí vzorec pro $p \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

Věta 1.9. Buď $p > 0$. Pak $\mathbf{\Gamma}(p+1) = p\mathbf{\Gamma}(p)$.

Důkaz.

$$\mathbf{\Gamma}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} = \left[\frac{x^p}{p} e^{-x} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} = \frac{1}{p} \mathbf{\Gamma}(p+1).$$

□

Poznámka. (1) Předchozí věta má obecnější platnost, platí pro $p \in \mathbb{C}$.
(2) $\mathbf{\Gamma}(1) = 1$, pomocí předchozí věty pak $\mathbf{\Gamma}(n+1) = n!$ pro $n \in \mathbb{N}$,
(3) $\mathbf{\Gamma}(1/2) = \sqrt{\pi}$,
(4) $\mathbf{\Gamma}(p+n) = (p+n-1)\cdots p\mathbf{\Gamma}(p)$,
(5) $\mathbf{\Gamma}$ je definovaná na $(0, +\infty)$. Lze prodloužit i na záporná p indukcí

$$\mathbf{\Gamma}(p) = \frac{\mathbf{\Gamma}(p+1)}{p}$$

pro $p \in (-1, 0)$ a takto to natáhnu na $(-n+1, n)$.

(6) Použitím vztahu

$$\ln \alpha = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{\alpha} - 1)$$

dostaneme

$$\mathbf{\Gamma}(p+1) = \int\limits_0^{+\infty} x^p e^{-x} \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(\ln \frac{1}{t}\right)^p \mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \lim_{n\to\infty} n^p \left(1 - t^{\frac{1}{n}}\right)^p \mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} n^p \int\limits_0^1 \tau^{n-1}(1-\tau)^p \,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{p+1} \mathbf{B}(n, p+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{p+1}(n-1)!\, p\mathbf{\Gamma}(p)}{(p+1)\cdots p\mathbf{\Gamma}(p)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^p\, n!}{\prod_{k=0}^{n}(p+k)}.$$

Takto lze definovat $\mathbf{\Gamma}$ i pro $\mathbb{C}$, ale problémy jsou s $\mathbb{Z}_-$.

(7) Funkce $\mathbf{\Gamma}$ je třídy $\mathcal{C}^\infty$, neboť integrál

$$\mathbf{\Gamma}^{(k)}(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \ln^k x \,\mathrm{d}x$$

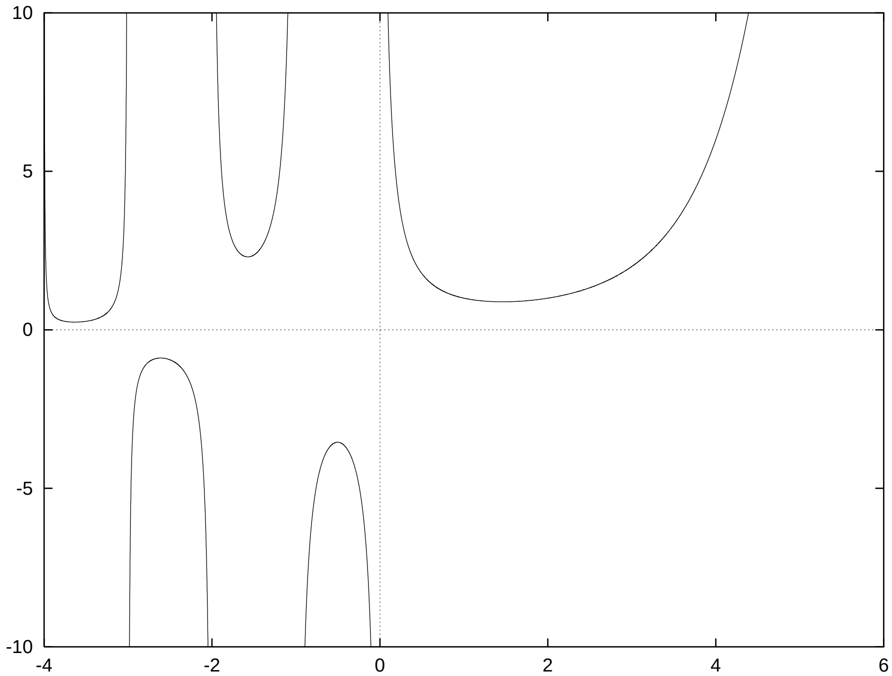
existuje — má integrabilní majorantu (pro každé p existuje okolí (p_1, p_2), na němž majoranta existuje):

$$\int\limits_0^1 \underbrace{x^{p-1} e^{-x} \ln^k x}_{\leq x^{p_1-1} e^{-x} |\ln x|^{k+1}} \,\mathrm{d}x + \int\limits_1^{+\infty} \underbrace{x^{p-1} e^{-x} \ln^{k+1} x}_{\leq x^{p_2-1} e^{-x} \ln^k x} \,\mathrm{d}x.$$

$$\mathbf{\Gamma}''(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \ln^2 x \,\mathrm{d}x > 0,$$

takže $\mathbf{\Gamma}$ je konvexní. $\mathbf{\Gamma}(1) = \mathbf{\Gamma}(2) = 1$, z Rolleovy věty existuje $p_0 \in (1,2)$ takové, že $\mathbf{\Gamma}'(p_0) = 0$. Funkce $\mathbf{\Gamma}'$ je rostoucí, takže $\mathbf{\Gamma}'(p) > 0$, právě když $p > p_0$, tedy $\mathbf{\Gamma}$ roste konvexně od p_0. Z Heineovy věty a spojitosti vyplývá

$$\lim_{p\to\infty} \mathbf{\Gamma}(p) = +\infty, \quad \mathbf{\Gamma}(p) = \frac{\mathbf{\Gamma}(p+1)}{p} \Rightarrow \lim_{p\to 0} \mathbf{\Gamma}(p) = +\infty.$$



Obrázek 1. Průběh funkce gama

Věta 1.10 (Legendrův vzorec)**.**

$$\mathbf{\Gamma}(p)\mathbf{\Gamma}(p+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}}\mathbf{\Gamma}(2p).$$

pro $p \geq 0$

Důkaz. Po úpravě a substituci $\frac{1}{2} - x = \frac{1}{2}\sqrt{t}$ dostaneme

$$\mathbf{B}(p,p) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{p-1} = \int_0^1 (x-x^2)^{p-1} = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right]^{p-1} =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2\right]^{p-1} = 2\int_0^1 \frac{1}{2^{2p}} t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{p-1}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2^{2p-1}}\mathbf{B}\left(\frac{1}{2}, p\right) = \frac{1}{2^{2p-1}}\frac{\mathbf{\Gamma}(\frac{1}{2})\mathbf{\Gamma}(p)}{\mathbf{\Gamma}(p+\frac{1}{2})} = \frac{\mathbf{\Gamma}^2(p)}{\mathbf{\Gamma}(2p)}.$$

□

Věta 1.11 (Stirlingova formule)**.**

$$\mathbf{\Gamma}(p) = \sqrt{2\pi}\, p^{p-\frac{1}{2}} e^{-p}(1 + r(p)),\ \text{kde}\ |r(p)| \leq \left(e^{\frac{1}{12p}} - 1\right).$$

Důkaz.

$$\mathbf{\Gamma}(n+1) = n! = \sqrt{2\pi}(n+1)^{n+\frac{1}{2}} e^{-n-1}(1 + r(n+1)) \approx \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n},$$

tedy

$$\frac{n!}{n^n e^{-n}} \approx \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\right)^{-1}.$$

□

Poznámka. Funkci $\mathbf{\Gamma}$ lze jednoznačně definovat takto: $F \in \mathcal{C}^1$ na $(0, +\infty)$, $F(p+1) = pF(p)$,

$$F(p)F(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad F(p)F\left(p + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p+1}}F(2p).$$