1. Měřitelné množiny

Definice 1.1. Buď $M \subset X$. Položme

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & x \in M \\ 0 & x \in X \smallsetminus M \end{cases}$$

χ_H nazveme **charakteristickou funkcí množiny** M.

Definice 1.2. Buď $M \subset X$, $\chi_M(x)$. Pak M je **měřitelná**, právě když χ_M je měřitelná.

Poznámka. $\chi_M \in \mathcal{M}$, právě když $\chi_M \in \Lambda$ (χ je nezáporná).

Definice 1.3. Buď M měřitelná množina, pak míru množiny M definujeme $\mu(M) = \mathbf{I}\chi_M$.

Poznámka.
1. $\mu(Z) = 0 \Leftrightarrow Z$ je nulové míry $\Leftrightarrow \chi_Z \sim 0 \Leftrightarrow \chi_Z$ je nulová skoro všude, nenulová na množině nulové míry $\Leftrightarrow Z$ je množina nenulových bodů.
2. Pomocí axiomu výberu lze zkonstruovat neměřitelnou množinu a tedy i neměřitelnou funkci. (Vrána skripta str. 59)

Věta 1.4. Buď $\{M_k\}_{k=1}^{n,\infty}$ nějaký spočetný systém měřitelných množin. Pak platí:
- (i) $M = \bigcup_k M_k$ je měřitelná,
- (ii) $N = \bigcap_k M_k$ je měřitelná,
- (iii) $M_1 \smallsetminus M_2$ je měřitelná.

Důkaz.

$$\chi_M(x) = \sup_k \chi_{M_k}(x),$$
$$\chi_N(x) = \inf_k \chi_{M_k}(x),$$

kde sup a inf jsou měřitelné funkce podle definice měřitelnosti množiny a z věty **??**

$$\chi_{M_1 \smallsetminus M_2} = \chi_{M_1} \smallsetminus \chi_{M_1 \cap M_2},$$

protože

$$\chi_{M_1 \smallsetminus M_2}(x) = \max(\chi_{M_1} - \chi_{M_2}, 0)(x).$$

□

Poznámka.
1. V $\mathbb{R}^n$ jsou prvky topologie (tj. otevřené množiny) měřitelné.

   Důkaz. Buď $A = A^\circ$. Víme, že $\mathcal{I} \in \mathcal{M}$. Ke každému bodu $\in A$ najdu interval $\mathcal{I}_r$ s racionálním středem a délkou hrany. Intervaly tvoří spočetný systém, takže podle předchozí věty je A měřitelná. Kompaktní interval je měřitelný a $A = \bigcup \mathcal{I}$. □

2. Uzavřené množiny jsou též měřitelné.

   Důkaz. Buď $A = \overline{A}$, pak $A = \mathbb{R}^n \smallsetminus B$, kde $B = B^\circ$, takže podle předchozí věty je A měřitelná. □

3. Množiny typu G_δ (spočetný průnik otevřených množin) a F_σ (spočetné sjednocení uzavřených množin) jsou měřitelné. Díky tomu jsou měřitelné i polouzavřené intervaly.

Věta 1.5. Buď $\{M_k\}_{k=1}^{n,\infty}$ systém měřitelných množin, $M = \bigcup_k M_k$ a nechť $M_j \cap M_i = \emptyset$ pro navzájem různá i, j. Pak

$$\mu(M) = \mu\left(\bigcup_k M_k\right) = \sum_{i=1}^{n,\infty} \mu(M_i).$$

Důkaz. Díky disjunktnosti M_k platí

$$\chi_M = \sum_k \chi_{M_k}.$$

1. konečný případ: aditivita integrálu

$$\mathbf{I}\chi = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{I}\chi_{M_i}.$$

(2) spočetný případ: Leviova věta

$$\mathbf{I}\chi = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{I}\chi_{M_i}.$$

$\square$

Poznámka. Lebesgueova míra je σ-aditivní (spočetně aditivní).

Věta 1.6. Buď $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ systém měřitelných množin, buďte

$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k, \quad N = \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k.$$

Pak platí:

(i) Je-li $M_k \subset M_{k+1}$, pak $\mu(M) = \lim_{k\to\infty} \mu(M_k)$.
(ii) Je-li $M_{k+1} \subset M_k$ a $\exists n \in \mathbb{N}$, že $\mu(M_n) < +\infty$, pak $\mu(N) = \lim_{k\to\infty} \mu(M_k)$.

Důkaz. (i)

$$\chi_M = \sup_{k\in\mathbb{N}} \chi_{M_k} = \lim_{m\to\infty} \max_{1\le k\le m} \chi_{M_k} = \lim_{k\to\infty} \chi_{M_k}$$

$$\chi_{M_k} \nearrow \chi_M, \quad \mathbf{I}\chi_{M_1} \ge 0 > -\infty$$

Z rozšíření Leviovy věty plyne

$$\mu(M) = \mathbf{I}\chi_M = \lim_{k\to\infty} \mathbf{I}\chi_{M_k}$$

(ii)

$$\chi_M = \inf_{k\in\mathbb{N}} \chi_{M_k} = \lim_{m\to\infty} \min_{1\le k\le m} \chi_{M_k} = \lim_{k\to\infty} \chi_{M_k}$$

$$\chi_{M_k} \searrow \chi_M, \quad \mathbf{I}\chi_{M_1} < +\infty$$

$$\mu(N) = \mathbf{I}\chi_N = \lim_{k\to\infty} \mathbf{I}\chi_{M_k}$$

$\square$

Příklad. $(-\infty, -n) \cup (n, +\infty) = A_n$, $\mu(A_n) = +\infty$, $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset$; bez podmínky $\mu(M_i) \le +\infty$ to nejde.

Věta 1.7. Buď $\{M_k\}_{k=1}^{n,\infty}$ nejvýše spočetný systém měřitelných množin $M = \bigcup_k M_k$. Platí

$$\mu(M) \le \sum_k \mu(M_k).$$

Důkaz. (1) Konečný případ: indukcí: $M = M_1 \cup M_2 = M_1 \cup (M_2 \setminus M_1)$; $\mu(M) = \mu(M_1) + \mu(M_2 \setminus M_1) \le \mu(M_1) + \mu(M_2)$.

(2) Spočetný případ:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} M_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \mu(M_k),$$

z 1. bodu minulé věty plyne

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} M_k\right) \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(M_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(M_k),$$

neboť

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} M_k\right) \subset \left(\bigcup_{k=1}^{n+1} M_k\right)$$

množinově „roste“.

$\square$

Poznámka. Buď $M \subset N$. Pak $\mu(M) \le \mu(N)$ a dokonce $\mu(M) < +\infty \Rightarrow \mu(N) - \mu(M) = \mu(N \setminus M)$.

Důkaz. $N = M \cup (N \setminus M)$, proto $\mu(N) = \mu(M) + \mu(N \setminus M) \ge \mu(M)$. $\square$