1. Křivkový integrál prvního druhu

Definice 1.1. Buď f reálná funkce $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, g dráha, $[g] \subset \operatorname{Dom} f$, σ rozdělení g. Potom klademe

$$S(f,g,\sigma) = \sum_{i=1}^{p} f(g(\xi_i))\,\|g(t_i) - g(t_{i-1})\| \text{ pro } \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

Definice 1.2 (křivkový integrál prvního druhu)**.** Buď f reálná funkce $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, g dráha,$[g] \subset \operatorname{Dom} f$. Nechť pro každou normální posloupnost rozdělení $\{\sigma_n\}_1^\infty$ existuje vlastní limita

$$\lim_{n\to\infty} S(f,g,\sigma_n) \overset{\text{ozn.}}{=} \int\limits_g f \mathrm{d}s.$$

Pak říkáme, že funkce f je **integrabilní** po dráze g a tuto limitu nazýváme křivkovým **integrálem funkce f po dráze** g, resp. **křivkovým integrálem prvního druhu**.

Věta 1.3. Má-li alespoň jedna strana rovnosti smysl, platí

(i) (aditivita)

$$\int\limits_g (f+h)\mathrm{d}s = \int\limits_g f\mathrm{d}s + \int\limits_g h\mathrm{d}s,$$

(ii) (homogenita)

$$\int\limits_g (\alpha f)\mathrm{d}s = \alpha \int\limits_g f\mathrm{d}s.$$

Věta 1.4. Má-li alespoň jedna strana rovnosti smysl, platí

(i)

$$\int\limits_{g_1 \dot{+} g_2} f\mathrm{d}s = \int\limits_{g_1} f\mathrm{d}s + \int\limits_{g_2} f\mathrm{d}s,$$

(ii)

$$\int\limits_{\dot{-}g} f\mathrm{d}s = + \int\limits_g f\mathrm{d}s,$$

(iii)

$$\left|\int\limits_g f\mathrm{d}s\right| \leq K\ l(g), \quad \text{kde } K \geq \sup_{\operatorname{Dom} g} |f(x)|.$$

Věta 1.5 (výpočet křivkového integrálu prvního druhu)**.** Buď $f \in \mathcal{C}^0, g \in \mathcal{C}^1, [g] \in \operatorname{Dom} f, \operatorname{Dom} g = [a,b]$. Potom funkce f je integrabilní a platí

$$\int\limits_g f\mathrm{d}s = \int\limits_a^b f(g(t))\,\|g'(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Důkaz. Obdobný důkazu **??**, není vyžadován na zkoušce. ☐

Poznámka. (1) Křivkový integrál prvního druhu je **neorientovaný**, je tedy nezávislý na parametrizaci dráhy.
(2) Vzorec na výpočet délky křivky: $l(g) = \int_g \mathrm{d}s$.
(3) Buď $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{C}^0$, $g \in \mathcal{C}^1$, $[g] \subset \operatorname{Dom}\omega$, $g'(t) \neq \underset{\leftarrow}{o}$ pro každé $t \in [a,b]$, tedy g je lokálně prostá. Pro $x \in [g]$ definujme

$$\vec{v}(x) = \left.\frac{g'(t)}{\|g'(t)\|}\right|_{x=g(t)}.$$

Pak platí (převod křivkového integrálu druhého druhu na první druh)

$$\int\limits_g \boldsymbol{\omega} = \int\limits_a^b \boldsymbol{\omega}(g(t))g'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_a^b \boldsymbol{\omega}(g(t))\vec{v}(g(t))\left\|g'(t)\right\|\mathrm{d}t = \int\limits_g \underleftarrow{\omega}\vec{v}\ \mathrm{d}s = \int\limits_g \left\langle \vec{F}, \vec{v} \right\rangle \mathrm{d}s.$$

Práci po dráze (křivkový integrál druhého druhu) můžeme tedy vyjádřit jako křivkový integrál prvního druhu (tečka $\cdot$ značí standardní skalární součin):

$$\int\limits_g \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int\limits_g \vec{F}\cdot \vec{r}\ \mathrm{d}s.$$

Proto se ve fyzice často používá užitečný, ale formálně nesprávný zápis $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{r}\ \mathrm{d}s$.