1. Diferenciální 1-formy

Definice 1.1. Zobrazení, které každému bodu z afinního prostoru $\mathbb{R}^n$ přiřadí objekt, nazveme:

(I) **skalárním polem** f na prostoru $\mathbb{R}^n$, zobrazuje-li $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$.
(II) **vektorovým polem** $\vec{F}$ na prostoru $\mathbb{R}^n$, zobrazuje-li $\vec{F} : \mathbb{R}^n \mapsto (V^n)$.
(III) **kovektorovým polem** $\boldsymbol{\omega}$ na prostoru $\mathbb{R}^n$, zobrazuje-li $\boldsymbol{\omega} : \mathbb{R}^n \mapsto (V^n)^\#$.

Definice 1.2. Nechť $(\underset{\leftarrow}{e}^{1}, \dots, \underset{\leftarrow}{e}^{n})$ báze $(V^n)^\#$ a $\omega_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. **Diferenciální 1-formou** (resp. diferenciální formou stupně 1) rozumíme kovektorové pole $\boldsymbol{\omega}$, jehož složky jsou skalárními poli ω_i, tj.

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \underset{\leftarrow}{e}^{i}.$$

Poznámka. (1) Bodový zápis diferenciální 1-formy je

$$\underset{\leftarrow}{\omega}(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x) \underset{\leftarrow}{e}^{i},$$

diferenciální 1-forma v bodě je tedy lineární kombinace kovektorů, tedy kovektor, jinými slovy **(lineární) 1-forma**.

(2) Součet diferenciálních forem bodově definujeme $\underset{\longleftarrow}{(\omega + \eta)}(x) = \underset{\leftarrow}{\omega}(x) + \underset{\leftarrow}{\eta}(x)$.

(3) Násobení číslem z tělesa bodově definujeme $\underset{\longleftarrow}{(t\omega)}(x) = t\underset{\leftarrow}{\omega}(x)$.

(4) Součin se skalárním polem bodově definujeme $\underset{\longleftarrow}{(f\omega)}(x) = f(x)\underset{\leftarrow}{\omega}(x)$.

Definice 1.3. Každé skalární pole $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ je diferenciální 0-forma. Je-li funkce f diferencovatelná na celém definičním oboru, pak f' je diferenciální 1-forma a nazýváme ji **vnější derivací** diferenciální 0-formy f a s použitím totální derivace $f'(x)$ bodově definujeme

$$(\mathrm{d}f)(x) = f'(x) \in (V^n)^\#$$

Poznámka. (1) d je symbol. Příkladem vnější derivace je totální diferenciál, gradient, rotace, divergence či Laplaceův operátor. Více později v **??**.

(2) Buďte soubor $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ báze V^n, soubor $(\underset{\leftarrow}{e}^{1}, \dots, \underset{\leftarrow}{e}^{n})$ k ní duální báze $(V^n)^\#$. Mějme (z LAA) souřadnicový izomorfismus $\mathbb{R}^n \mapsto V^n$ vztahem

$$x = (x^1, \dots, x^n)^T \mapsto \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \vec{e}_i,$$

kde $x \in \mathbb{R}^n$ je bod z afinního prostoru a $\vec{x} \in V^n$ je vektor z přidruženého lineárního prostoru. Dále pro každé $i \in \hat{n}$ mějme (z LAA) souřadnicový funkcionál $\underset{\leftarrow}{e}^{i} : V^n \mapsto \mathbb{R}$

$$\underset{\leftarrow}{e}^{i} \vec{x} = x^i.$$

Díky souřadnicovému izomorfismu můžeme tento souřadnicový funkcionál reprezentovat souřadnicovou funkcí $\chi^i(x) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

$$\chi^i(x) = \underset{\leftarrow}{e}^{i} \vec{x},$$

která je zřejmě diferencovatelná. Souřadnicové funkci říkáme (zejména ve fyzice) též projektor. Pro vnější derivaci souřadnicové funkce χ^i v libovolném bodě x platí

$$\mathrm{d}\chi^i(x) = \underset{\leftarrow}{e}^{i}.$$

To je důvod, proč se ve funkčních předpisech diferenciálních forem nepíše $\underset{\leftarrow}{e}^{i}$, nýbrž $\mathrm{d}x^i$ (viz příští bod). Pro diferenciální formu $\boldsymbol{\omega}$ z linearity platí

$$\underset{\leftarrow}{\omega}(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x) \underset{\leftarrow}{e}^{i} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x) \mathrm{d}\chi^i(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i \mathrm{d}\chi^i \right)(x).$$

Diferenciální forma $\boldsymbol{\omega}$ je tedy obecně „lineární kombinace“ derivací souřadnicových funkcí. Lineární kombinace to dle definice není, neboť koeficienty ω_i nejsou čísla z tělesa, nýbrž reálné funkce.

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mathrm{d}\chi^i.$$

(3) Máme-li diferenciální formu $\mathrm{d}f$, její složky $f_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ a označíme-li $\mathrm{d}\chi^i$ jako $\mathrm{d}x^i$, můžeme ji zapsat ve tvaru

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i.$$

Tuto formu nazýváme **totální diferenciál**, správněji **exaktní diferenciální forma**.

(4) Porovnejme totální diferenciál $\mathrm{d}f$ s totální derivací $f'(x)\vec{h}$.
  (a) Máme-li funkce $V^n \mapsto V^m$, pojmy nemají společný význam, neboť totální derivace je lineární zobrazení $\mathcal{L}(V^n, V^m)$.
  (b) Máme-li funkce z $V^n \mapsto \mathbb{R}$, totální derivace $\underleftarrow{f'(x)}$ leží v $\mathcal{L}(V^n, \mathbb{R}) = (V^n)^\#$, je to tedy kovektor (zobrazuje V^n do $\mathbb{R}$).
  (c) Totální diferenciál je zobrazení, které každému bodu přiřadí kovektor (zobrazuje $\mathbb{R}^n$ do $(V^n)^\#$.

Pokud tedy $\mathrm{d}f$ ukotvíme v pevném bodě t_0, získáme kovektor, který má význam totální derivace, tj.

$$\mathrm{d}f(t_0) = \underleftarrow{f'(t_0)}.$$

Dle Riezsovy věty pro každý kovektor $\underleftarrow{f'(t_0)}$ existuje vektor grad f. Vztah mezi gradientem a totálním diferenciálem ukazuje věta **??**. Tím je otázka rozdílnosti $\mathrm{d}f$ a $\underleftarrow{f'(x)}\vec{h}$ vyřešena.

(5) $xy\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y$ je tedy formálně blbost — správně je

$$\omega_1(x,y) = xy,\ \omega_2(x,y) = y:\ \boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathrm{d}x + \omega_2 \mathrm{d}y$$

nebo

$$\omega(x,y) = xy\underset{\leftarrow}{e}^{1} + y\underset{\leftarrow}{e}^{2}.$$

Protože je však tento špatný zápis zvyklostí, budeme se ho držet i my.

(6) Následující definice platí pro diferenciální formy všech stupňů. O diferenciálních k-formách později v **??**.

Definice 1.4. Diferenciální 1-forma $\boldsymbol{\omega}$ je **třídy** $\mathcal{C}^q$, právě když ω_i jsou třídy $\mathcal{C}^q$ pro všechna $i \in \widehat{n}$.

Definice 1.5. Diferenciální 1-forma $\boldsymbol{\omega}$ se nazývá

(I) **uzavřená**, jestliže platí

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} \quad \forall i,j \in \widehat{n},$$

(II) **exaktní**, jestliže existuje funkce f taková, že $\mathrm{d}f = \boldsymbol{\omega}$.

Funkce f se nazývá **primitivní funkce**.

Poznámka. (1) Exaktní forma třídy $\mathcal{C}^1$ je uzavřená. Není-li při vhodné třídě forma uzavřená, není exaktní (neexistuje primitivní funkce).

(2) V mechanice se obvykle setkáváme s exaktními 1-formami typu $F = \mathrm{d}U$. O funkci U pak říkáme, že je **potenciál** pole F a pole F pak nazýváme potenciální, resp. nevírové:

Buď $\boldsymbol{\omega} =\in \mathcal{C}^1$, $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}f$, $f \in \mathcal{C}^2$, $\omega_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$. Pak

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = 0 \Rightarrow \operatorname{rot} f = 0.$$

(3) 1-formám se v termodynamice tradičně říká **Pfaffovy formy**, správněji lineární diferenciální formy. Exaktním 1-formám tvaru $\mathrm{d}F$ se pak říká **úplné diferenciály**, kde F je **stavová veličina**. Formy, které nejsou exaktní, se značí $\eth W$, $\eth Q$, říkáme, že W a Q nejsou úplnými diferenciály. Proto zavádíme stavovou veličinu S, díky níž je $\eth Q = T\mathrm{d}S$ již úplným diferenciálem.

Příklad.

$$\omega(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial y} = -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial\omega_2}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

takže $\boldsymbol{\omega}$ je uzavřená. Zkusíme najít kandidáta na primitivní funkci, pak bude $\boldsymbol{\omega}$ i exaktní.

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{pro } y \geq 0 \\ -\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{pro } y < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{|y|}{x^2+y^2}\ \forall x,y, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{x\operatorname{sgn} y}{x^2+y^2},$$

$$P_\pi = \{(x,0) \mid x \leq 0\}$$

$$\omega(x,y) = \varphi'(x,y) = d\varphi(x,y)$$

Aby byla $\boldsymbol{\omega}$ exaktní, musí platit $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{d}f$ na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; $\varphi'(x,y) = f'(x,y)$ na oblasti $\mathbb{R}^2 \setminus P_\pi$. Liší se o konstantu: $f = \varphi + C$ a to je spor kvůli skoku na P_π. f musí být spojitá, ale φ není.

Poznámka. Jestliže je množina jednoduše souvislá, pak je uzavřená 1–forma exaktní.

Poznámka. Připomeneme, že oblast je jednoduše souvislá, právě když ona i její doplněk jsou souvislé, tj. „množina bez děr“.