1. Kompaktní prostory

Definice 1.1. Buď X topologický prostor, $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ systém množin $\{V\}_{V \in \mathcal{S}}$. Řekneme, že $\mathcal{S}$ **pokrývá** X, právě když $(\forall x \in X)(\exists V \in \mathcal{S})(x \in V)$.

Řekneme, že systém $\mathcal{S}_1$ je **podpokrytím systému** $\mathcal{S}$, právě když:

(I) $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}$,
(II) $\mathcal{S}_1$ je pokrytím X.

Poznámka. Je-li $\mathcal{S} \subset \tau$, nazýváme pokrytí **otevřeným pokrytím**. Někdy zavádíme i uzavřené pokrytí $\mathcal{S} \subset c\tau \subset \mathcal{P}(x)$. Otevřené pokrytí se využije při integraci na varietách (MAA4).

Definice 1.2. Topologický prostor nazveme **kompaktním**, právě když každé jeho otevřené pokrytí má konečné podpokrytí. Množinu $A \subset X$ nazveme kompaktní, právě když A jako topologický podprostor X je kompaktní.

Poznámka.
(1) Konečné sjednocení kompaktních množin je kompaktní. (Pokryjeme je sjednocením jejich konečných pokrytí.)
(2) Každá konečná množina je kompaktní. (Pokryjeme ji konečným počtem okolí bodů této množiny.)
(3) V metrickém prostoru je každá kompaktní množina omezená. ($\mathcal{S}_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x, n)$ pokrývá celý prostor, tedy pro pokrytí kompaktní množiny stačí jedna koule.)
(4) $\mathbb{R}$ není kompakt ($\mathcal{S} = \{(-n, n) | n \in \mathbb{N}\}$ nemá konečné podpokrytí), ale $\mathbb{R}^*$ už kompakt je. (Pokryji ho okolími nekonečen a uzavřeným intervalem z $\mathbb{R}$, který je podle 1.4 kompaktní)
(5) Kompaktnost není metrický pojem (tj. nezávisí na metrice).

Věta 1.3. Prostor X je kompaktní, právě když každý systém uzavřených množin s prázdným průnikem obsahuje konečný podsystém s prázdným průnikem.

Důkaz. Množina A_α je uzavřená, právě když ji lze vyjádřit jako $A_\alpha = X \setminus B_\alpha$, kde B_α je otevřená množina. Dále platí, pomocí de Morganových zákonů:

$$\emptyset = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} (X \setminus B_\alpha) = X \setminus \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} B_\alpha \Leftrightarrow X \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} B_\alpha$$

a existuje konečné podpokrytí. □

Poznámka.
(1) Buď $A_n = \overline{A_n}$, $A_n \supset A_{n+1}$ klesající (ve smyslu inkluze) posloupnost uzavřených množin v kompaktním prostoru a nechť platí

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset.$$

Pak nutně existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $A_n = \emptyset$.
(2) *(o existenci)* Pro klesající posloupnost uzavřených neprázdných množin v kompaktním prostoru musí platit:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset.$$

(3) *(o jednoznačnosti)* Buď (X, ϱ) kompaktní metrický prostor, $A_n = \overline{A_n}$, $A_n \supset A_{n+1}$, $d(A_n) \to 0$, $A_n \neq \emptyset$. Pak existuje právě jedno x takové, že platí

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Věta 1.4. Každý omezený uzavřený interval $\mathcal{I}$ v $\mathbb{R}^n$ je kompaktní.

Poznámka. Intervalem v $\mathbb{R}^n$ se myslí kartézský součin intervalů z $\mathbb{R}$.

Důkaz. Kontrola!!!!!(nejsem si jistý správností/pochopením tohoto důkazu) (Sporem)

$$(\exists V \in \mathcal{S})(\mathcal{I} \subset \bigcup_{V \in \mathcal{S}} V)(V \in \tau)$$

tak, že neexistuje konečné podpokrytí $\mathcal{S}_1$. Nyní budu $\mathcal{I} = [a, b]$ opakovaně půlit, tj. tvořit posloupnost uzavřených intervalů $[a_n, b_n]_{n=1}^{\infty}$ tak, že

$$(b_n - a_n < \frac{a-b}{2^n}).$$

Vždy bude existovat část, která zůstává nepokrytá konečným podpokrytím. Z věty o půlení intervalu plyne, že existuje limitní bod, který si označíme x. x je hromadným bodem posloupností (a_n) a (b_n) a zároveň

$$(\exists V \in \mathcal{S})(x \in V).$$

Protože je toto V otevřené, musí pokrývat okolí x jímž, je jeden z intervalů $[a_n, b_n]$, což je spor s nepokrytím konečným podsystémem (interval $[a, b]$ pokryjeme konečným množstvím intervalů $[a_n, b_n]$). □

Věta 1.5. Buď A kompaktní podmnožina Hausdorffova topologického prostoru X. Potom A je uzavřená.

Důkaz. Buď $x \in X \setminus A$ bod z doplňku množiny A. Pak platí:

$$(\forall y \in A)(\exists \mathrm{H}_x, \mathrm{H}_y)(\mathrm{H}_x \cap \mathrm{H}_y = \emptyset).$$

Dále platí:

$$A = \bigcup_{y \in A} (A \cap \mathrm{H}_y) \subset \bigcup_{y \in A} \mathrm{H}_y,$$

tedy systém okolí H_{y_α} pokrývá množinu A. Protože A je kompaktní, existuje její konečné podpokrytí, tedy

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap \mathrm{H}_{y_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{H}_{y_i}.$$

Jelikož pro okolí bodů y a pro odpovídající okolí bodu x platí $\mathrm{H}_{x_i} \cap \mathrm{H}_{y_i} = \emptyset$, pro průnik všech okolí bodu x platí:

$$\mathrm{H}_x \cap A = \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{H}_{x_i} \right) \cap A = \emptyset,$$

tedy existuje okolí bodu x disjunktní s množinou A, takže $x \in (X \setminus A)^\circ$. Bod $x \in X \setminus A$ jsme volili libovolně, proto je doplněk množiny A otevřený, tudíž A je uzavřená. □

Věta 1.6. V kompaktním prostoru jsou všechny uzavřené množiny kompaktní.

Důkaz. Pro libovolnou uzavřenou množinu M nalezneme její pokrytí $\{G_\alpha\}$ a doplníme ho otevřenou množinou $G := X \setminus M$ na pokrytí celého prostoru X. Nalezneme konečné podpokrytí X, označíme ho $\{G_i \mid i \in \hat{n}\}$. Toto pokrytí musí obsahovat G, proto mu dáme první index (kdyby ho neobsahovalo, tak ho tam přidám, stále to bude konečné podpokrytí). Potom $\{G_i \mid i \in \{2, \ldots, n\}\}$ je konečným pokrytím M. □

Věta 1.7. Buď $\overrightarrow{X}$ lineární prostor konečné dimenze. Potom $A \subset \overrightarrow{X}$ je kompaktní, právě když je uzavřená a omezená.

Důkaz. a) Implikace $\Rightarrow$ je triviální. (Plyne z 3 a 1.5)
b) $\Leftarrow$: Buď A omezená a uzavřená.

1) $\overrightarrow{X} = \mathbb{R}^n$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ (maximová norma, $\forall \vec{x} \in \overrightarrow{X}$ $\|x\| = \max_{i \in \hat{n}} |x_i|$).
   A je omezená, tudíž $A \subset B(0, R) \subset \overline{B}(0, R)$. $\overline{B}(0, R)$ je interval, který je v $\mathbb{R}^n$ kompaktní. A je uzavřená v kompaktním prostoru, tedy A je kompaktní.

2) $\vec{X} = V^n$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$.
Každý vektor $\vec{x} \in V^n$ lze vyjádřit jako kombinaci bazických vektorů:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \vec{e_i}.$$

Buď $f : \vec{x} \mapsto (x^1, \dots, x^n)$. Zobrazení f je homeomorfismus $V^n \to \mathbb{R}^n$, tudíž $(V^n, \| \|_\infty)$ a $(R^n, \| \|_\infty)$ jsou homeomorfní. (V případě $\vec{X} = V^n$ nad komplexními čísly musíme vzít $V^n \to \mathbb{R}^{2n}$ tak, že bereme zvlášť reálnou a komplexní část x^i)

3) $\vec{X} = V^n$, $\|\cdot\|$ libovolná.
Pro libovolný vektor $\vec{x}$ platí:

$$\|\vec{x}\| \leq \sum_{i=1}^{n} \left|x^i\right| \|\vec{e_i}\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\vec{e_i}\| \|\vec{x}\|_\infty = K \|\vec{x}\|_\infty ,$$

což je jedna část nerovnosti z věty **??**. Kromě toho z tohoto vztahu vyplývá spojitost identity $(\vec{X}, \|\cdot\|_\infty) \to (\vec{X}, \|\cdot\|)$.
Libovolná koule $\overline{B}(\vec{0}, R) \subset (\vec{X}, \|\cdot\|)$ je uzavřená, díky spojitosti je uzavřená i v $(\vec{X}, \|\cdot\|_\infty)$.
$A = \{\vec{x} \in \vec{X} \mid \|\vec{x}\|_\infty = 1\}$ je uzavřená a omezená v $(\vec{X}, \|\cdot\|_\infty)$.
Dále platí:

$$\bigcap_{R>0} \left(\overline{B}(\vec{0}, R) \cap A\right) = \emptyset,$$

neboť v průniku koulí leží pouze $\vec{0}$, ten ale neleží v A a platí tedy $(\exists \varrho > 0)(\overline{B}(\vec{0}, \varrho) \cap A = \emptyset)$.
Pak $(\forall \vec{x})(\|\vec{x}\| \leq \varrho \Rightarrow \|\vec{x}\|_\infty \neq 1)$.
Dokážeme, že v takovém případě $\|\vec{x}\|_\infty < 1$. Nechť platí, že $\|\vec{x_0}\| \leq \varrho \wedge \|\vec{x_0}\|_\infty > 1$. Pak

$$\left\| \frac{\vec{x_0}}{\|\vec{x_0}\|_\infty} \right\| = \frac{1}{\|\vec{x_0}\|_\infty} \|\vec{x_0}\| < \|\vec{x_0}\| \leq \varrho,$$

ale

$$\left\| \frac{\vec{x_0}}{\|\vec{x_0}\|_\infty} \right\|_\infty = \frac{1}{\|\vec{x_0}\|_\infty} \|\vec{x_0}\|_\infty = 1,$$

což je spor. Tedy $(\forall \vec{x})(\|\vec{x}\| \leq \varrho \Rightarrow \|\vec{x}\|_\infty < 1)$.
Pro všechny $\vec{x} \neq \vec{0}$ pak platí:

$$\left\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \varrho \right\| = \varrho,$$

tedy

$$\left\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \varrho \right\|_\infty < 1,$$

z čehož vyplývá

$$\|\vec{x}\|_\infty < \frac{1}{\varrho} \|\vec{x}\| .$$

Pro $\vec{x} = \vec{0}$ ve vztahu nastává rovnost. Dokázali jsme tedy druhou část nerovnosti.

□

Definice 1.8. Buď $\{x_n\}_1^\infty \subset X$. Pak a je **hromadnou hodnotou posloupnosti**, právě když v libovolném okolí H_a bodu a leží nekonečně mnoho členů posloupnosti.

Poznámka. (1) (*alternativní definice pro metrický prostor*) Nechť (X, ϱ) je metrický prostor. Pak a je hromadnou hodnotou posloupnosti (x_n) $\Leftrightarrow$ existuje vybraná posloupnost (x_{k_n}) tak, že $(x_{k_n}) \to a$. (Tuto posloupnost sestavujeme tak, že bereme $x_{k_n} \in B(a, \frac{1}{n})$, takže potřebujeme metriku a nelze to udělat v topologii)
(2) Jestliže $x_n \to a$, pak a je hromadnou hodnotou $\{x_n\}_1^\infty$.

Věta 1.9. V kompaktním prostoru má každá posloupnost alespoň jednu hromadnou hodnotu.

Důkaz. Nechť $A_n = \{x_k\}_{k\geq n}$. Pak $\overline{A_n} \neq \emptyset$, $\overline{A_n} \supset \overline{A_{n+1}}$, takže platí:

$$a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \neq \emptyset,$$

kde $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$. Dokážeme nyní, že a je hromadným bodem, tj. že v každém jeho okolí leží nekonečně mnoho členů posloupnosti. (*Sporem*): předpokládejme opak, tedy $\exists \mathrm{H}_a$ tak, že $\{x_n\}_1^{\infty} \bigcap \mathrm{H}_a$ je konečná. Potom $\exists m$, tak, že pro $\forall n > m$ je $A_n \bigcap \mathrm{H}_a = \emptyset \wedge a \in \overline{A_n}$, což je spor (viz definice bodu v uzávěru). □

Věta 1.10. V kompaktním Hausdorffově prostoru posloupnost konverguje, právě když má právě jednu hromadnou hodnotu.

Důkaz. Implikace konverguje $\Rightarrow \exists_1$ je zřejmá. Opačnou implikaci dokážeme sporem. Nechť posloupnost nekonverguje, tj. existuje **otevřené** okolí hromadné hodnoty H_a takové, že v $X \setminus \mathrm{H}_a$ leží ještě nekonečně mnoho členů posloupnosti. Platí, že $X \setminus \mathrm{H}_a = \overline{X \setminus \mathrm{H}_a}$, tedy $X \setminus \mathrm{H}_a$ je kompaktní. Podle 1.9 tam ale posloupnost musí mít další hromadnou hodnotu, což je spor. □

Lemma 1.11 (Lebesgue)**.** Buď (X, ϱ) metrický prostor, kde každá posloupnost má alespoň jednu hromadnou hodnotu, $\mathcal{S} = \{V\}_{V\in\mathcal{S}}$ otevřené pokrytí tohoto prostoru. Potom existuje ε tak, že každá koule o poloměru ε leží alespoň v jedné z pokrývajících množin.

Důkaz. Pro spor předpokládejme existenci takového otevřeného pokrytí $\mathcal{S}$, že pro každé ε existuje koule o poloměru ε taková, jenž není podmnožinou žádné z pokrývajících množin z $\mathcal{S}$.

Vezměme tedy takové pokrytí $\mathcal{S} = \{V\}_{V\in\mathcal{S}}$ a uvažujme posloupnost $\{\varepsilon_n\}_1^{\infty} = 1/n$. Pro ni existuje posloupnost koulí $\{B_n(x_n, \varepsilon_n)\}_1^{\infty}$, které nejsou podmnožinou žádné z pokrývajících množin $V \in \mathcal{S}$.

Dle předpokladu věty existuje pro posloupnost středů $\{x_n\}_1^{\infty}$ vybraná posloupnost $x_{k_n} \to a$. Nalezněme $V \in \mathcal{S}$ tak, aby $a \in V^{\circ}$; potom určitě $\exists B(a, r) \subset V$.

Z definice limity najděme n_1 tak, aby $(\forall n > n_1)(\varrho(x_{k_n}, a) < \frac{r}{2})$, a n_2 tak, aby $(\forall n > n_2)(\frac{1}{k_n} < \frac{r}{2})$.

Po volbě $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ platí $(\forall n > n_0)(\{B_{k_n}\}_1^{\infty} \subset V)$, což je spor s volbou posloupnosti $\{B_n\}_1^{\infty}$. □

Definice 1.12. **ε-sítí** v metrickém prostoru (X, ϱ) rozumíme množinu koulí o poloměru ε pokrývající X.

Poznámka. Definice ε-sítě není jednotná. Někdy se výše uvedený pojem nazývá ε-pokrytím a v definici ε-sítě se navíc požaduje minimální vzdálenost středů koulí o ε.

Lemma 1.13 (Borel)**.** Buď (X, ϱ) metrický prostor, v němž každá posloupnost má alespoň jednu hromadnou hodnotu. Potom pro každé ε existuje **konečná** ε-síť (se středy koulí vzdálenými od sebe minimálně o ε).

Poznámka. Podle Vrány není nutné, aby byly středy koulí vzdálené alespoň o ε. (Pouze to vyplyne z důkazu.)

Důkaz. Vezměme libovolné ε a dokažme, že pro něj existuje konečná ε-síť. Vezměme bod x_1, vytvořme kouli $B_1(x_1, \varepsilon)$. Leží v kouli celý prostor? Pokud ano máme konečnou ε-síť, pokud ne, vezměme bod x_2 z $X \setminus B_1$ a vyrobme další kouli se středem v tomto bodě $B_2(x_2, \varepsilon)$. Leží v těchto dvou koulích celý prostor? Pokud ano, máme konečnou ε-síť, pokud ne, pokračujeme dále s vytvářením koulí se středy v doplňcích. Prostor musí být pokryt konečným počtem koulí, protože pokud by nebyl, dostáváme posloupnost středů koulí $\{x_n\}_1^{\infty}$, které jsou vzdáleny alespoň o ε a nemá nemá tudíž hromadnou hodnotu, což je spor s předpokladem. □

Věta 1.14 (Weierstrass)**.** Buď (X, ϱ) metrický prostor. Potom X je kompaktní, právě když každá posloupnost má konvergentní podposloupnost.

Důkaz. a) Implikace $\Rightarrow$ je dokázaná (1.9).

b) ($\Leftarrow$): Buď A_α libovolné pokrytí prostoru X. Potom podle 1.11 existuje ε tak, že každá koule o poloměru ε leží v některé z pokrývajících množin. Podle 1.13 stačí k pokrytí X konečný počet těchto koulí. Hledaným konečným podpokrytím je množina nadmnožin koulí $B(x_i, \varepsilon)$.

□

1.1. **Kompaktnost a spojitost.**

Věta 1.15. Buďte (X, τ_X), (Y, τ_Y) topologické prostory, $f : X \to Y$ spojité zobrazení. Potom je-li X kompaktní, je i $f(X)$ kompaktní.

Důkaz. Buď $\mathcal{S}$ otevřené pokrytí $f(X)$. Potom vzor $\mathcal{S}$ je otevřené pokrytí X, neboť otevřenost se přenáší z Y do X. X je kompaktní, takže $f^{-1}(\mathcal{S})$ má konečné podpokrytí. Konečným podpokrytím $f(X)$ je pak konečná množina obrazů množin pokrývajících X. □

Věta 1.16. Buď $f : A \to \mathbb{R}$ zobrazení spojité na kompaktní množině A. Potom f nabývá na A svého infima a suprema.

Důkaz. $f(A)$ je kompaktní, tudíž uzavřená, takže infimum a supremum v ní leží. (Uzavřená množina obsahuje všechny svoje hromadné body a supremum i infimum jimi jsou) □

Poznámka. Ale nikoliv všeho mezi nimi. K tomu je potřeba předpoklad souvislosti, který bude probrán v následující kapitole.

Definice 1.17. Buďte (X, ϱ), (Y, σ) metrické prostory. Řekneme, že zobrazení $f : X \to Y$ je **stejnoměrně spojité**, právě když

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in X)(\varrho(x, y) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Poznámka. Uvědomme si, že na metrických prostorech je definice **??** ekvivalentní s naší „starou“ definicí spojitosti: zobrazení $f : (X, \varrho) \to (Y, \sigma)$ je spojité, právě když

$$(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in X)(\varrho(x, y) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Věta 1.18 (Cantor)**.** Zobrazení f spojité na kompaktní množině X je spojité stejnoměrně.

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Nechť platí

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x, y \in X)(\varrho(x, y) < \delta \wedge \sigma(f(x), f(y)) \geq \varepsilon).$$

Buď $\{x_n\}_1^\infty, \{y_n\}_1^\infty$ posloupnosti takové, že platí

$$\varrho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}, \quad \sigma(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon.$$

Protože množina je kompaktní, existuje vybraná konvergentní podposloupnost $x_{k_n} \to x$. Dále platí

$$\varrho(y_{k_n}, x) \leq \varrho(x_{k_n}, y_{k_n}) + \varrho(x_{k_n}, x),$$

tedy i y_{k_n} konverguje k x.

Ze spojitosti f vyplývá existence $\delta > 0$ takového, že pro všechna x' taková, že $\varrho(x', x) < \delta$ je $\sigma(f(x'), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Protože x_{k_n} a y_{k_n} konvergují, existuje m takové, že $\varrho(x_{k_m}, x) < \delta$ a $\varrho(y_{k_m}, x) < \delta$, takže

$$\sigma(f(x_{k_m}), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ a } \sigma(f(y_{k_m}), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2},$$

z čehož vyplývá

$$\sigma(f(x_{k_m}), f(y_{k_m})) \leq \sigma(f(x_{k_m}), f(x)) + \sigma(f(y_{k_m}), f(x)) < \varepsilon,$$

což je spor. □