1. Funkční řady

Definice 1.1. Buď $\{f_n\}_0^\infty$ posloupnost komplexních funkcí definovaných na množině $A \subset \mathbb{C}$, $F_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z)$ pro všechna $z \in A$ a všechna $n \in \mathbb{N}_0$. Pak uspořádanou dvojici $(\{f_n\}_0^\infty, \{F_n\}_0^\infty)$ nazveme **funkční řadou** a značíme $\sum_0^\infty f_n$.

Pokud funkční posloupnost $\{F_n\}_0^\infty$ má na množině A limitní funkci F, nazveme ji **součtovou funkcí** řady $\sum_0^\infty f_n$ a píšeme $\sum_0^\infty f_n = F$.

Poznámka. (1) F_n — n-tý částečný součet; $\{F_n\}_0^\infty$ — posloupnost částečných součtů.

(2) Studovat řadu pro nás znamená studovat posloupnost jejích částečných součtů.

(3) S funkčními řadami jsme se již setkali — mocninné řady.

Definice 1.2. Řekneme, že řada $\sum_0^\infty f_n(z) = (\{f_n(z)\}_0^\infty, \{F_n(z)\}_0^\infty)$ stejnoměrně konverguje na množině A, jestliže na množině A stejnoměrně konverguje posloupnost $\{F_n(z)\}_0^\infty$.

Věta 1.3 (Bolzano, Cauchy)**.** Řada $\sum_0^\infty f_n(z)$ konverguje stejnoměrně na množině A právě tehdy, jestliže pro všechna kladná čísla ε existuje $n_0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n > n_0$, pro všechna přirozená čísla p a všechna $z \in A$ platí:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)\right| < \varepsilon.$$

Důkaz. Vzhledem k tomu, že $\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) = F_{n+p}(z) - F_n(z)$, stačí aplikovat větu **??** na posloupnost $\{F_n\}_0^\infty$. ☐

Poznámka. Odsud plyne nutná podmínka pro stejnoměrnou konvergenci řady:

$$\sum_{n=0}^\infty f_n(z) \overset{A}{\rightrightarrows} \implies f_n(z) \overset{A}{\rightrightarrows} 0.$$

Věta 1.4 (Weierstrassovo kritérium)**.** Buďte $\{f_n\}_0^\infty$ a $\{g_n\}_0^\infty$ dvě posloupnosti funkcí definovaných na množině A. Nechť dále pro všechna $z \in A$ a všechna $n \in \mathbb{N}_0$ platí: $|f_n(z)| \leq g_n(z)$. Potom, konverguje-li řada $\sum_0^\infty g_n(z)$ stejnoměrně na množině A, konverguje stejnoměrně na množině A také řada $\sum_0^\infty f_n(z)$.

Důkaz. Plyne z nerovnosti

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(z)$$

a z věty 1.3. ☐

Poznámka. Řadu obvykle majorizujeme (shora odhadujeme) konvergentní číselnou řadou, která je z definice též stejnoměrně konvergentní a splňuje předpoklady 1.4.

Věta 1.5. Buď $\{f_n\}_0^\infty$ posloupnost komplexních funkcí definovaných na množině A, $\{g_n\}_0^\infty$ monotonní posloupnost reálných funkcí definovaných na A. Označme $F_n = \sum_{k=0}^n f_k$. Nechť dále je splněno některé z následujících kritérií:

(i) (Dirichlet) $\{F_n\}_0^\infty$ stejně omezená na A a $g_n(z) \overset{A}{\rightrightarrows} 0$.

(ii) (Abel) $F_n(z) \overset{A}{\rightrightarrows}$ a $\{g_n\}_0^\infty$ stejně omezená na A.

Potom řada $\sum_{n=0}^\infty f_n(z) g_n(z)$ konverguje stejnoměrně na množině A.

Důkaz. Důkaz je založen na Abelově parciální sumaci: Pro libovolné $n \in \mathbb{N}_0$ a $p \in \mathbb{N}$ platí:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k g_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} (F_{n,k-n} - F_{n,k-1-n}) g_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} F_{n,k-n}(g_k - g_{k+1}) + F_{n,p} g_{n+p}, \tag{1}$$

kde $F_{n,k} = \sum_{j=n+1}^{n+k} f_j = F_{n+k} - F_n$ označuje úsek řady.

a) Nechť je splněna podmínka (i); potom existuje kladné číslo K tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ a všechna $z \in A$ je $|F_n(z)| < K$. Zvolme nyní $\varepsilon > 0$. Existuje n_0 tak, že pro všechna $z \in A$ a všechna $n > n_0$ bude $|g_n(z)| < \frac{\varepsilon}{6K}$. Podle (1) potom pro všechna $n > n_0$, všechna $p \in \mathbb{N}$ a všechna $z \in A$ platí:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)g_k(z)\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} F_{n,k-n}(z)(g_k(z)-g_{k+1}(z)) + F_{n,p}(z)g_{n+p}(z)\right| \le \\ &\le \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |F_{n,k-n}(z)|\;|g_k(z)-g_{k+1}(z)| + |F_{n,p}(z)|\;|g_{n+p}(z)| \le \\ &\le 2K\left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |g_k(z)-g_{k+1}(z)| + |g_{n+p}(z)|\right) = \\ &= 2K(|g_{n+1}(z)-g_{n+p}(z)| + |g_{n+p}(z)|) \le \\ &\le 2K(|g_{n+1}(z)| + |g_{n+p}(z)| + |g_{n+p}(z)|) < \varepsilon\end{aligned}$$

Rovnost mezi třetím a čtvrtým řádkem platí díky tomu, že posloupnost $\{g_n\}_1^\infty$ je monotonní, a proto mají všechny rozdíly $g_k(z) - g_{k+1}(z)$ stejné znaménko.

b) Je-li splněna podmínka (ii), pak existuje kladné číslo M tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ a všechna $z \in A$ je $|g_n(z)| < M$. Zvolme opět $\varepsilon > 0$. Nyní existuje $n_0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna přirozená $n > n_0$, všechna $p \in \mathbb{N}$ a všechna $z \in A$ bude $|F_{n,p}(z)| < \frac{\varepsilon}{3M}$. Potom ovšem podle (1) pro všechna $n > n_0$ a všechna $z \in A$ platí:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z)g_k(z)\right| &\le \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |F_{n,k-n}(z)|\;|g_k(z)-g_{k+1}(z)| + |F_{n,p}(z)|\;|g_{n+p}(z)| \le \\ &\le \frac{\varepsilon}{3M}\left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |g_k(z)-g_{k+1}(z)| + |g_{n+p}(z)|\right) = \\ &= \frac{\varepsilon}{3M}(|g_{n+1}(z)-g_{n+p}(z)| + |g_{n+p}(z)|) < \varepsilon\end{aligned}$$

Odtud potom jak v bodě a), tak v bodě b) dostáváme podle věty 1.3 stejnoměrnou konvergenci řady $\sum_0^\infty f_n(z)g_n(z)$ na množině A. □

Věta 1.6. (Abel) Buď $\sum_0^\infty a_n(z-z_0)^n$ mocninná řada s kladným poloměrem konvergence R. Potom řada $\sum_0^\infty a_n(z-z_0)^n$ konverguje stejnoměrně na každém kruhu $B(z_0, r)$, kde $r < R$.

Důkaz. Buď $r \in (0, R)$, potom pro všechna $z \in B(z_0, r)$ a všechna $n \in \mathbb{N}_0$ platí $|a_n(z-z_0)^n| \le |a_n|\,r^n$. Odtud a z věty 1.4 vyplývá stejnoměrná konvergence řady $\sum_0^\infty a_n(z-z_0)^n$ na množině $B(z_0, r)$. □

Poznámka. (1) Proto se jako stejnoměrně konvergentní majorizující řada do 1.4 často používá také mocninná řada.

(2) Alternativní znění: Mocninná řada konverguje na každé kompaktní množině, která je částí vnitřku oboru konvergence.

Věta 1.7. (1. věta Abelova) Nechť má reálná mocninná řada $\sum_0^\infty a_n(x-x_0)^n$ kladný poloměr konvergence R. Potom, konverguje-li řada $\sum_0^\infty a_n(x-x_0)^n$ v bodě x_0+R resp. x_0-R, pak konverguje stejnoměrně na intervalu $[x_0, x_0+R]$ resp. $[x_0-R, x_0]$.

Důkaz. Nechť např. řada $\sum_0^\infty a_n(x-x_0)^n$ konverguje v bodě x_0+R. Potom

$$\sum_0^\infty a_n(x-x_0)^n = \sum_0^\infty a_n R^n \left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n.$$

Protože pro všechna $x \in [x_0, x_0+R]$ a všechna $n \in \mathbb{N}_0$ je $\left|\frac{x-x_0}{R}\right| \le 1$ a řada $\sum_0^\infty a_n R^n$ stejnoměrně konverguje na intervalu $[x_0, x_0+R]$, je tvrzení věty důsledkem Abelova kritéria 1.5 (ii). □

Věta 1.8 (o limitě)**.** Buď $\{f_n\}_0^\infty$ posloupnost komplexních funkcí definovaných na množině $A \subset \mathbb{C}$ a nechť

(I) $z_0 \in A'$;
(II) Pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ existuje $\lim_{z\to z_0, z\in A} f_n(z) = a_n$;
(III) Řada $\sum_0^\infty f_n(z)$ konverguje stejnoměrně na množině A k $F(z)$.

Potom platí:

(i) Řada $\sum_0^\infty a_n$ konverguje;
(ii) Existuje $\lim_{z\to z_0, z\in A} F(z)$;
(iii) $\lim_{z\to z_0, z\in A} F(z) = \sum_0^\infty a_n$.

To jest:

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in A}} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in A}} f_n(z)$$

Důkaz. Položme $F_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z)$, $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ pro $n \in \mathbb{N}_0$. Potom $\lim_{z\to z_0, z\in A} F_n(z) = s_n$, $F_n(z) \overset{A}{\rightrightarrows} F(z)$ a tvrzení věty je důsledkem **??**. □

Věta 1.9 (o spojitosti)**.** Buď $\{f_n\}_1^\infty$ posloupnost funkcí definovaných na množině A a spojitých v bodě $z_0 \in A$ (vzhledem k A). Potom, konverguje-li řada $\sum_0^\infty f_n(z)$ stejnoměrně na množině A, je její součtová funkce spojitá v bodě z_0 vzhledem k množině A.

Důkaz. Plyne z věty 1.8 a důkazu věty **??** □

Věta 1.10 (2. věta Abelova)**.** Konverguje-li mocninná řada s reálnými koeficienty, s kladným poloměrem konvergence R a se středem v bodě x_0 v bodě $x_0 + R$ resp. v bodě $x_0 - R$, je její součtová funkce spojitá v bodě $x_0 + R$ zleva, resp. v bodě $x_0 - R$ zprava.

Důkaz. Nechť např. mocninná řada konverguje v bodě $x_0 + R$. Potom podle věty 1.7 konverguje tato řada stejnoměrně na intervalu $[x_0, x_0 + R]$ a tudíž dle věty 1.9 musí být její součtová funkce spojitá na intervalu $[x_0, x_0+R]$ vzhledem k intervalu $[x_0, x_0+R]$. Speciálně musí být součtová funkce spojitá v bodě $x_0 + R$ zleva. □

Věta 1.11 (o derivaci)**.** Buď $\{f_n\}_0^\infty$ posloupnost reálných diferencovatelných funkcí na omezeném a otevřeném intervalu $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ takových, že platí:

(I) Existuje $c \in \mathcal{J}$ tak, že řada $\sum_0^\infty f_n(c)$ konverguje;
(II) Řada $\sum_0^\infty f_n'(x)$ konverguje stejnoměrně na intervalu $\mathcal{J}$.

Potom platí:

(i) Řada $\sum_0^\infty f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na intervalu $\mathcal{J}$;
(ii) Součtová funkce F řady $\sum_0^\infty f_n$ je diferencovatelná na intervalu $\mathcal{J}$;
(iii) Derivace F' je součtovou funkcí řady $\sum_0^\infty f_n'$.

To jest:

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\Big)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(z)$$

Důkaz. Stačí užít větu **??** na posloupnost částečných součtů. □

Věta 1.12 (o integraci)**.** Buď $\{f_n\}_0^\infty$ posloupnost riemannovsky integrabilních funkcí na intervalu $[a, b]$. Nechť dále řada $\sum_0^\infty f_n(x)$ stejnoměrně konverguje na intervalu $[a, b]$ a F buď její součtová funkce. Potom i funkce F je integrabilní na intervalu $[a, b]$ a platí:

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \sum_0^\infty \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Plyne z věty **??**. □

Věta 1.13. Buď $\{f_n\}_0^\infty$ posloupnost riemannovsky integrabilních funkcí na intervalu $[a,b]$. Nechť dále řada $\sum_0^\infty f_n(x)$ stejnoměrně konverguje na intervalu $[a,b]$ a označme F její součtovou funkci. Potom pro každou funkci g, která má absolutně konvergentní zobecněný integrál na intervalu $[a,b]$, platí:

$$\int\limits_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_0^\infty \int\limits_a^b f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Podle věty 1.12 je funkce F riemannovsky integrabilní na intervalu $[a,b]$ a tudíž všechny zobecněné integrály $\int_a^b f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ absolutně konvergují. Zbývá tedy dokázat výše uvedenou rovnost. Ze stejnoměrné konvergence řady $\sum_0^\infty f_n(x)$ na intervalu $[a,b]$ plyne, že ke zvolenému kladnému číslu ε existuje $n_0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna přirozená čísla $n > n_0$ a pro všechna $x \in [a,b]$ je

$$|F_n(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{1 + \int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x},$$

kde $F_n = \sum_{k=0}^n f_k$. Potom pro $n > n_0$ platí:

$$\left|\sum_{k=0}^n \int\limits_a^b f_k(x)g(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int\limits_a^b F_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_a^b |F_n(x) - F(x)|\;|g(x)|\,\mathrm{d}x < \int\limits_a^b \frac{\varepsilon\,|g(x)|\,\mathrm{d}x}{1 + \int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x} < \varepsilon$$

□

Poznámka.

(1) Právě dokázaná věta je na přednášce zahrnuta v rámci důkazu **??**. Podobných případů, kde se pořadí vět liší od přednášky, může být vzhledem k faktu, že Vrána přednáší zpaměti, více.

(2) Ve skutečnosti nezáleží na tom, zdali máme funkci integrabilní na (a,b) či $[a,b]$, neboť integrál na krajních hodnotách nezáleží. Ve všech definicích týkajících se integrability mohou být namísto uzavřených intervalů otevřené a naopak, to platí i pro následující kapitolu. Na přednášce se značí $/a,b/$.