1. Derivace vyšších řádů

Definice 1.1. Buď $f : X \to Y$ diferencovatelné v každém bodě svého definičního oboru. Nechť zobrazení $f' : x \mapsto f'(x)$ je diferencovatelné v $x_0 \in \operatorname{Dom} f$. Potom řekneme, že zobrazení f je v x_0 dvakrát diferencovatelné (má v x_0 derivaci 2. řádu).

Poznámka.

1. Pro definici vyšší diferencovatelnosti je zapotřebí derivovat zobrazení z prostoru X do prostoru $\mathcal{L}(\vec{X}, \vec{Y})$. Odtud vyplývá nutnost definovat derivaci zobrazení v obecnějších prostorech — při studiu pouze zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ by bylo obtížné definovat vyšší derivace.
2. Dle definice je $(f')'(x_0) \in \mathcal{L}(\vec{X}, \mathcal{L}(\vec{X}, \vec{Y}))$. Tento prostor je lineárně izometrický s prostorem všech bilineárních zobrazení $\vec{X} \times \vec{X} \to \vec{Y}$. Značíme $\mathcal{L}(\vec{X}, \mathcal{L}(\vec{X}, \vec{Y})) \cong \mathcal{L}_2(\vec{X}, \vec{X}; \vec{Y})$ (izometrie odpovídá homeomorfismu metrických prostorů, tj. dané prostory jsou z hlediska metrických vlastností nerozlišitelné).

Definice 1.2. Existuje-li $(f')'(x_0)$, potom 2. derivací zobrazení f v bodě x_0 rozumíme zobrazení $f''(x_0) \in \mathcal{L}_2(\vec{X}, \vec{X}; \vec{Y})$, tedy

$$f''(x_0)(\vec{h}, \vec{k}) = \left((f')'(x_0)\vec{h}\right)\vec{k} = \left((f')(x_0)\vec{k}\right)'(x_0)\vec{h}.$$

Věta 1.3. Nechť existuje $f''(x_0)$. Pak v x_0 existuje derivace 2. řádu v libovolných dvou směrech a platí

$$f_{\vec{v}\vec{w}}(x_0) = \frac{\partial^2}{\partial w \partial v} f(x_0) = f''(x_0)(\vec{w}, \vec{v}) = \left(f'(x_0)\vec{v}\right)'(x_0)\vec{w}$$

Věta 1.4. Druhá derivace je symetrické bilineární zobrazení.

$$f''(x_0)(\vec{h}, \vec{k}) = f''(x_0)(\vec{k}, \vec{h})$$

Důkaz provedeme pro $f : X \to \mathbb{R}$. Zvolíme libovolně nenulové volné vektory $\vec{h}, \vec{k}$. Uvažujme kouli $B(x_0, r)$, kde je derivace f' omezená (z definice druhé derivace musí ta první v té kouli existovat). Vezmeme-li $\delta(\|\vec{h}\| + \|\vec{k}\|) < r$, pak pro $|t| < \delta$ platí, že body $x_0, (x_0 + t\vec{h}), (x_0 + t\vec{k}), (x_0 + t(\vec{h} + \vec{k}))$ leží v kouli B. Pro $\vec{\xi}$, který leží na úsečce $\vec{\xi} \in \left[\vec{0}, \vec{h}\right]$ lze definovat

$$g(\vec{\xi}) = f(x_0 + t(\vec{\xi} + \vec{k})) - f(x_0 + t\vec{\xi})$$

$$\begin{aligned} F(t) &= f(x_0 + t(\vec{h} + \vec{k})) - f(x_0 + t\vec{h}) - f(x_0 + t\vec{k}) + f(x_0) = g(\vec{h}) - g(\vec{0}) = g'(\vec{\xi})\vec{h} = \\ &= t(f'(x_0 + t(\vec{\xi} + \vec{k})) - f'(x_0 + t\vec{\xi}))\vec{h}. \end{aligned}$$

Protože

$$f'(x) = f'(x_0) + (f')'(x_0)(x - x_0) + \omega(x)\|x - x_0\|,$$

platí

$$F(t) = t\left((f')'(x_0)t\vec{k} + \omega(x_0 + t(\vec{\xi} + \vec{k}))\left\|t(\vec{\xi} + \vec{k})\right\| - \omega(x_0 + t\vec{\xi})\left\|t\vec{\xi}\right\|\right)\vec{h}.$$

(členy $f'(x_0)$ a $f'(t\vec{\xi})$ se odečtou)

$$\frac{F(t)}{t^2} = \left((f')'(x_0)\vec{k}\right)\vec{h} + \nu(t),$$

kde

$$\lim_{t \to 0} \nu(t) = 0.$$

Protože $F(t)$ je symetrické v $\vec{k}$ a $\vec{h}$, analogickými úpravami lze dospět ke vztahu

$$\frac{F(t)}{t^2} = \left((f')'(x_0)\vec{h}\right)\vec{k} + \eta(t),$$

takže 2. derivace je symetrická. $\square$

Poznámka. (1) Buď $f : X \to \mathbb{R}$, $\dim X < \infty$. Potom druhá derivace $f''(x_0)$ je kvadratická forma a její matici nazýváme **Hessovou maticí** a její determinant **Hesiánem**. Pro $f''(x_0)$ platí polarizační identity a další vlastnosti kvadratických forem. Navíc $f''(x_0) \sim \mathbb{J}(\operatorname{grad} f(x_0))$ ($\sim$ značí ekvivalenci matic).

(2) Derivace m-tého řádu je symetrický tenzor m-tého řádu, tj.

$$f^{(m)}(x_0)\left(\vec{h_1}, \dots, \vec{h_m}\right) = \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} f_{i_1\dots i_m}(x_0)\, h_1^{i_1} \dots h_m^{i_m}.$$

Pokud je tedy zobrazení v daném bodě m-krát diferencovatelné, pak směrové derivace m-tého řádu nezávisí na pořadí derivování. Dle následující věty však diferencovatelnost v bodě není nutnou podmínkou pro záměnu směrových derivací.

Věta 1.5 (H. A. Schwarz)**.** Jestliže má zobrazení f v bodě x_0 spojitou derivaci $f_{\vec{v}\vec{w}}(x_0)$ a existuje $f_{\vec{w}\vec{v}}(x_0)$, pak jsou záměnné.

Věta 1.6. Buď $f : X \to Y$ zobrazení a nechť existuje $f^{(m)}(x_0)$. Potom existuje okolí H_{x_0} a zobrazení $\omega : \mathrm{H}_{x_0} \to \vec{Y}$ takové, že pro každé $x \in \mathrm{H}_{x_0}$ platí

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)\vec{h}^i + \omega(x) \left\|\vec{h}\right\|^m,$$

kde $\vec{h} = x - x_0$ a $\lim_{x\to x_0} \omega(x) = 0$ a

$$L(\underbrace{\vec{h}, \dots, \vec{h}}_{r\text{-krát}}) = L\vec{h}^r.$$

Důkaz. Větu dokážeme pro $Y \subset \mathbb{R}$. Důkaz lze provést indukcí. Pro $m = 1$ věta zřejmě platí díky poznámce **??**.**??**. Předpokládejme tedy platnost věty pro $m \in \mathbb{N}$. Buď f zobrazení $(m+1)$-krát diferencovatelné v bodě x_0 a zaveďme pomocné zobrazení $g : \vec{X} \to \vec{Y}$ definované předpisem

$$g(\vec{h}) = f(x_0 + \vec{h}) - \sum_{i=0}^{m+1} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)\vec{h}^i.$$

Uvědomme si, že g je diferencovatelné na jistém okolí bodu $\vec{0}$ a že platí

$$g'(\vec{h}) = f'(x_0 + \vec{h}) - \sum_{i=1}^{m+1} \frac{1}{(i-1)!}(f')^{(i-1)}(x_0)\vec{h}^{i-1} = f'(x_0 + \vec{h}) - \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!}(f')^{(i)}(x_0)\vec{h}^i.$$

Podle indukčního předpokladu nyní existuje okolí H_{x_0} a zobrazení $\mu : X \to \vec{Y}$ takové, že pro všechna $\vec{h}$, pro která je $x_0 + \vec{h} \in \mathrm{H}_{x_0}$, platí

$$g'(\vec{h}) = \mu(x_0 + \vec{h}) \left\|\vec{h}\right\|^m,$$

$$\lim_{x\to x_0} \mu(x) = 0.$$

Pro $Y \subset \mathbb{R}$ podle věty **??** dostáváme

$$g(\vec{h}) = g(\vec{h}) - g(\vec{0}) = g'(\vec{\xi})\vec{h} = \mu(x_0 + \vec{\xi}) \left\|\vec{\xi}\right\|^m \vec{h},$$

$$\left\|g(\vec{h})\right\| \le \left\|\mu(x_0 + \vec{\xi})\right\| \left\|\vec{\xi}\right\|^m \left\|\vec{h}\right\| \le \left\|\mu(x_0 + \vec{\xi})\right\| \left\|\vec{h}\right\|^{m+1},$$

neboť $\left\|\vec{\xi}\right\| \le \left\|\vec{h}\right\|$. Pro všechna $x \in \mathrm{H}_{x_0}$ tedy platí

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m+1} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x - x_0)^i - \omega(x) \left\|x - x_0\right\|^{m+1},$$

kde $\|\omega(x)\| \le \left\|\mu(x_0 + \vec{\xi})\right\|$ a tudíž $\lim_{x\to x_0} \omega(x) = \vec{0}$. □

Věta 1.7 (Taylor)**.** Buď $f : X \to \mathbb{R}$ taková, že $f \in \mathcal{C}^m\,[x_0, x]$ (na úsečce!) a $f \in \mathcal{C}^{m+1}(x_0, x)$. Pak existuje $\xi \in (x_0, x)$ takové, že platí:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x - x_0)^i + \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x - x_0)^{m+1}.$$

Důkaz. Definujme funkci

$$\varphi(t) = f(x_0 + t(x - x_0)).$$

Pak

$$\varphi'(t) = f'(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0), \quad \varphi'(0) = f'(x_0)(x - x_0),$$
$$\varphi''(0) = f''(x_0)(x - x_0)^2, \quad \varphi^{(i)}(0) = f^{(i)}(x_0)(x - x_0)^i.$$

$\varphi(t)$ je zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, lze tedy uplatnit klasickou verzi Taylorovy věty:

$$\varphi(1) = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!} \varphi^{(i)}(0) + \frac{\varphi^{(m+1)}(\vartheta)}{(m+1)!}.$$

□

Definice 1.8 (třídy hladkosti)**.** Buď $A = A^\circ$, $A \subset \operatorname{Dom} f$. Řekneme, že f je **třídy**:

(I) $\mathcal{C}^k$ na A (značíme $f \in \mathcal{C}^k(A)$), pokud v každém bodě $x_0 \in A$ existují $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(k)}(x_0)$ a pokud $f', f'', \ldots, f^{(k)} \in \mathcal{C}^0(A)$, tj. f je na A **spojitě diferencovatelná do řádu** k;

(II) $\mathcal{C}^\infty$, pokud f má na A spojité derivace všech řádů, tj. f je na A **hladká**;

(III) $\mathcal{C}^\omega$, pokud $f \in \mathcal{C}^\infty$ a její Taylorův rozvoj v libovolném bodě $x_0 \in A$ konverguje k f, tj. f je na A **analytická**.

Pokud se explicitně neuvede množina A, na které daný výrok platí, míní se obvykle maximální možná, tj. $\operatorname{Dom} f$. V tomto případě klasifikace zahrnuje předpoklad $\operatorname{Dom} f = (\operatorname{Dom} f)^\circ$!

Poznámka. Obecně platí

$$\mathcal{C}^0 \supset \mathcal{C}^1 \supset \mathcal{C}^2 \supset \cdots \supset \mathcal{C}^\infty \supset \mathcal{C}^\omega.$$

Méně zřejmé je, že ani jedna inkluze není rovností.

Příklad. Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zadaná

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/(\|x\|^2 - 1)} & \|x\| < 1 \\ 0 & \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

je hladká na celém $\operatorname{Dom} f$, tj. $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Platí však $f^{(n)}(x) = 0$ — její Taylorův rozvoj v okolí nuly tedy odpovídá všude nulové funkci, tj. $f \notin \mathcal{C}^\omega(\mathbb{R}^n)$. Tuto funkci doc. Krbálek nazývá **Cimrmanovou buřinkou**.