1. Aplikace lineárního programování v teorii her

Definice 1.1. Nechť $n \in \mathbf{N}$, $X_1, X_2, \ldots, X_n \neq \emptyset$, $M_1, M_2, \ldots, M_n : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \mapsto \mathbf{R}$. Množinu $\{\widehat{n}, X_1, \ldots, X_n, M_1, \ldots, M_n\}$ nazýváme **hrou** n **hráčů** (v normálním tvaru).

- $\widehat{n}$ je **množina hráčů** $1, 2, \ldots, n$,
- X_i je **prostor strategií** i**-tého hráče**,
- $x \in X_i$ je **strategie** i**-tého hráče**,
- M_i je **výplatní funkce** i**-tého hráče**,
- $M_i(x_1, \ldots, x_n)$ je **výhra resp. prohra** i**-tého hráče**.

Příklad. Hra dvou hráčů: $n = 2$, $X_1 = X_2 = \langle 0, 1\rangle$, $M_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, $M_2(x_1, x_2) = -(x_1 + x_2)$.

Definice 1.2. Nechť je dána hra N hráčů $\{\widehat{n}, X_1, \ldots, X_n, M_1, \ldots, M_n\}$.

(1) Nazýváme ji **konečnou**, jsou-li prostory strategií všech hráčů konečné množiny, jinak ji nazýváme **nekonečnou**.
(2) Existuje-li $K \in \mathbf{R}$ takové, že pro každou n-tici $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$ je

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(x_1, \ldots, x_n) = K,$$

nazýváme tuto hru **hrou s konstantním součtem** K, jinak **hrou s nekonstantním součtem**.

1.1. **Nekonfliktní rozhodovací situace.** Hra $\{1, X, M\}$. Optimální strategie je takové $\overline{x} \in X$, že $M(\overline{x}) = \max\{M(x) | x \in X\}$. Optimální strategie nemusí existovat (např. $M(x) = x,\ X = (0, 1)$).

1.2. **Antagonistický konflikt.** Budeme se zabývat pouze **hrou dvou hráčů** s konstantním součtem. Označme $X_1 = X$, $X_2 = Y$, $M_1(x, y) + M_2(x, y) = K$. Je-li $K = 0$, označíme $M = M_1 = -M_2$.

Definice 1.3. Nechť je dána hra s konstantním součtem K: $\{\widehat{2}, X, Y, M_1, M_2\}$. **Optimální strategií 1. hráče** nazveme prvek $\overline{x} \in X$ takový, k němuž existuje $\overline{y} \in Y$ s touto vlastností: $(\forall x \in X)(\forall y \in Y)(M_1(x, \overline{y}) \leq M_1(\overline{x}, \overline{y}) \wedge M_2(\overline{x}, y) \leq M_2(\overline{x}, \overline{y}))$. Prvek $\overline{y}$ je **optimální strategie 2. hráče**.

Poznámka. Je-li $K = 0$, pak $M(x, \overline{y}) \leq M(\overline{x}, \overline{y}) \leq M(\overline{x}, y)$. Dvojici $(\overline{x}, \overline{y})$ nazýváme **řešení hry**, $M(\overline{x}, \overline{y})$ je **cena hry**. Cena hry je jednoznačná: Nechť $(\tilde{x}, \tilde{y})$ také řeší hru. Potom pro každé x, y platí $M(x, \tilde{y}) \leq M(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq M(\tilde{x}, y)$. Po dosazení $x = \overline{x}$ a $y = \overline{y}$ máme $M(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq M(\tilde{x}, \overline{y}) \leq M(\overline{x}, \overline{y}) \leq M(\overline{x}, \tilde{y}) \leq M(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Příklad. Pro výše uvedenou hru je $\overline{x} = 1$, $\overline{y} = 0$, neboť $x \leq 1 \leq 1 + y$.

Věta 1.4. Nechť je dána hra s konstantním součtem K: $\{\widehat{2}, X, Y, M_1, M_2\}$. Potom $\overline{x}$ resp. $\overline{y}$ jsou optimální strategie v této hře, právě když $\overline{x}$ a $\overline{y}$ jsou optimální strategie ve hře s nulovým součtem $\{\widehat{2}, X, Y, M\}$, kde $M = M_1 - M_2$.

Důkaz. (1) ($\Rightarrow$) Podle definice pro každé x, y platí

$$M_1(x, \overline{y}) \leq M_1(\overline{x}, \overline{y}) \leq M_1(\overline{x}, y),$$

po dosazení $M_1(x, y) = K - M_2(x, y)$ máme

$$K - M_2(x, \overline{y}) \leq K - M_2(\overline{x}, \overline{y}) \leq K - M_2(\overline{x}, y),$$

po sečtení

$$(M_1 - M_2)(x, \overline{y}) \leq (M_1 - M_2)(\overline{x}, \overline{y}) \leq (M_1 - M_2)(\overline{x}, y).$$

(2) ($\Leftarrow$) Nechť platí $(M_1 - M_2)(x, \overline{y}) \leq (M_1 - M_2)(\overline{x}, \overline{y}) \leq (M_1 - M_2)(\overline{x}, y)$. Dosadíme $M_2 = K - M_1$.

$$M_1(x, \overline{y}) - (K - M_1(x, \overline{y})) \leq M_1(\overline{x}, \overline{y}) - (K - M_1(\overline{x}, \overline{y})),$$

tedy $2M_1(x, \overline{y}) \leq 2M_1(\overline{x}, \overline{y})$. Analogicky pro druhou nerovnost. $\square$

1.3. **Konečný antagonistický konflikt.** $X = \widehat{m}$, $Y = \widehat{n}$, $K = 0$, $M(i,j) = a_{ij}$.

Definice 1.5. Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{m,n}$. Hru s nulovým součtem $\{\widehat{2}, \widehat{m}, \widehat{n}, M\}$, kde $M(i,j) = a_{ij}$ nazýváme **maticovou hrou**. $\mathbf{A}$ je **matice hry**.

Pro optimální strategii platí $a_{i\bar{j}} \le a_{\bar{i}\bar{j}} \le a_{\bar{i}j}$. Prvek $a_{\bar{i}\bar{j}}$, který splňuje tyto nerovnosti (a je tedy nejmenší v řádku a největší ve sloupci), se nazývá sedlový prvek.

Příklad. Matice
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & \mathbf{4} & 5 \\ -3 & 5 & 3 & 7 \\ 7 & 8 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$
má sedlový prvek $\bar{i} = 1$, $\bar{j} = 3$. Matice
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$
nemá sedlový prvek.

Definice 1.6. Nechť je dána maticová hra s maticí $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m,n}$. Hru $\{\widehat{2}, (X), (Y), M\}$, kde
$$(X) = \left\{ (x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{R}^m \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \wedge x_i \ge 0 \text{ pro } i \in \widehat{m} \right\},$$
$$(Y) = \left\{ (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \wedge y_j \ge 0 \text{ pro } j \in \widehat{n} \right\},$$
$$M(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = x\mathbf{A}y^T,$$
nazýváme **smíšeným rozšířením** původní maticové hry.

Vektory typu $(1,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), \dots, (0,\dots,0,1)$ nazýváme **ryzí strategie**, ostatní jsou **smíšené strategie**.

Věta 1.7. Smíšené rozšíření každé maticové hry má řešení.

Důkaz. (1) Dokážeme, že smíšené rozšíření má řešení, pokud jsou všechny prvky matice $\mathbf{A}$ kladné, tj. $(\forall i \in \widehat{m})(\forall j \in \widehat{n})(a_{ij} > 0)$. Chceme dokázat, že
$$(\exists \bar{x} \in (X))(\exists \bar{y} \in (Y))(\forall x \in (X))(\forall y \in (Y))(x\mathbf{A}\bar{y}^T \le \bar{x}\mathbf{A}\bar{y}^T \le \bar{x}\mathbf{A}y^T).$$
Buď $\tilde{x} \in (X)$. Definujeme $f_{\tilde{x}}(y) = \tilde{x}\mathbf{A}y^T$ pro $y \in (Y)$. Označme
$$\min_{y \in (Y)} f_{\tilde{x}}(y) = c_{\tilde{x}},$$
existenci minima zaručuje kompaktnost (Y) a spojitost $f_{\tilde{x}}$. Pro každé $y \in (Y)$ je tedy $c_{\tilde{x}} \le \tilde{x}\mathbf{A}y^T$. Analogicky pro $\tilde{y} \in (Y)$ definujeme $g_{\tilde{y}}(x) = x\mathbf{A}\tilde{y}^T$,
$$\max_{x \in (X)} g_{\tilde{y}}(x) = v_{\tilde{y}}$$
a platí, že $v_{\tilde{y}} \ge x\mathbf{A}\tilde{y}^T$ pro každé $x \in (X)$.

Pokud bychom našli $v_{\tilde{y}} \le c_{\tilde{x}}$, byly by $\tilde{x}, \tilde{y}$ optimální strategie, neboť
$$0 < x\mathbf{A}\tilde{y}^T \le v_{\tilde{y}} \le c_{\tilde{x}} \le \tilde{x}\mathbf{A}y^T,$$
což musí platit i pro $x = \tilde{x}$, $y = \tilde{y}$, proto $c_{\tilde{x}} = v_{\tilde{y}} = \tilde{x}\mathbf{A}\tilde{y}^T$. Označme společnou hodnotu $c_{\tilde{x}} = v_{\tilde{y}} = V > 0$. Budeme dokazovat, že
$$(\exists V > 0)(\exists \bar{x} \in (X))(\exists \bar{y} \in (Y))(\forall x \in (X))(\forall y \in (Y))(x\mathbf{A}\bar{y}^T \le V \le \bar{x}\mathbf{A}y^T).$$

Označme $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m)$, $\overline{y} = (\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)$. Uvažujme nejprve ryzí strategie x a y. Potom musí platit

$$\begin{array}{cc}
\overline{x}_1 a_{11} + \overline{x}_2 a_{21} + \cdots + \overline{x}_m a_{m1} \geq V & \overline{y}_1 a_{11} + \overline{y}_2 a_{12} + \cdots + \overline{y}_n a_{1n} \leq V \\
\vdots & \vdots \\
\overline{x}_1 a_{12} + \overline{x}_2 a_{22} + \cdots + \overline{x}_m a_{m2} \geq V & \overline{y}_1 a_{21} + \overline{y}_2 a_{22} + \cdots + \overline{y}_n a_{2n} \leq V \\
\overline{x}_1 a_{1n} + \overline{x}_2 a_{2n} + \cdots + \overline{x}_m a_{mn} \geq V & \overline{y}_1 a_{m1} + \overline{y}_2 a_{m2} + \cdots + \overline{y}_n a_{mn} \leq V.
\end{array}$$

Budou-li platit tyto nerovnosti, pak $x\mathbf{A}\overline{y}^T \leq V \leq \overline{x}\mathbf{A}y^T$ pro každé x, y. Stačí nerovnice vynásobit $y_1, \ldots, y_n$ (resp. $x_1, \ldots, x_n$) a sečíst. Na pravé straně pak dostaneme opět V.

Protože V musí být kladné, každou nerovnici vydělíme V a zavedeme

$$\xi_i = \frac{\overline{x}_i}{V}, \quad \eta_i = \frac{\overline{y}_i}{V}.$$

Potom nerovnice přejdou na

$$\begin{array}{cc}
\xi_1 a_{11} + \cdots + \xi_m a_{m1} \geq 1 & \eta_1 a_{11} + \cdots + \eta_m a_{1n} \leq 1 \\
\vdots & \vdots \\
\xi_1 a_{1n} + \cdots + \xi_m a_{mn} \geq 1 & \eta_1 a_{m1} + \cdots + \eta_m a_{mn} \leq 1.
\end{array}$$

Dále platí

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{x}_i = 1,\ \overline{x}_i \geq 0 \iff \sum_{i=1}^{m} \xi_i = \frac{1}{V},\ \xi_i \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{y}_j = 1,\ \overline{y}_j \geq 0 \iff \sum_{j=1}^{n} \eta_j = \frac{1}{V},\ \eta_j \geq 0.$$

Budeme tedy hledat

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \xi_i, \quad \max w = \sum_{j=1}^{n} \eta_j.$$

Pokud budou $z_{min} = w_{max}$, tj. bude existovat optimální řešení, bude

$$V = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \xi_i} = \frac{1}{z_{min}}.$$

Stačí dokázat, že primární i duální úloha mají přípustné řešení. U duální je to jasné (vyhovuje $\eta = 0$). Primární úloha má přípustné řešení díky kladnosti prvků a_{ij}. Stačí zvolit např. ξ_1 dostatečně velké a zbytek $\xi_i = 0$. Proto mají obě úlohy optimální řešení.

Protože 0 není přípustné řešení primární úlohy, bude $z_{min} = w_{max} > 0$. Pro řešení hry pak platí

$$\overline{x}_i = V\xi_i, \quad \overline{y}_j = V\eta_j.$$

(2) Obecný případ:

Lemma 1.8. Optimální strategie smíšeného rozšíření maticové hry se nezmění, přičteme-li ke každému prvku matice $\mathbf{A}$ totéž číslo c. Cena nové hry se o c zvětší.

Důkaz. Buďte $\overline{x}, \overline{y}$ řešení hry s maticí $\mathbf{A}$. Potom pro každé x, y platí $x\mathbf{A}\overline{y}^T \leq \overline{x}\mathbf{A}\overline{y}^T \leq \overline{x}\mathbf{A}y^T$. Buď dále $\mathbf{I} \in \mathbf{R}^{m,n}$, $\mathbf{I}_{ij} = 1$. Potom $x\mathbf{I}y^T = 1$ pro $x \in (X), y \in (Y)$. Proto $cx\mathbf{I}y^T = c$ a platí

$$x\mathbf{A}\overline{y}^T + c \leq \overline{x}\mathbf{A}\overline{y}^T + c \leq \overline{x}\mathbf{A}y^T + c,$$

$$x\mathbf{A}\overline{y}^T + cx\mathbf{I}\overline{y}^T \leq \overline{x}\mathbf{A}\overline{y}^T + c\overline{x}\mathbf{I}\overline{y}^T \leq \overline{x}\mathbf{A}y^T + c\overline{x}\mathbf{I}\ y^T,$$

$$x(\mathbf{A} + c\mathbf{I})\overline{y}^T \leq \overline{x}(\mathbf{A} + c\mathbf{I})\overline{y}^T \leq \overline{x}(\mathbf{A} + c\mathbf{I})y^T. \quad \square$$

K matici A tak stačí pouze přičíst dostatečně velké číslo, abychom dostali všechny prvky kladné. Nakonec odečteme c od V. $\square$

Příklad. Nechť matice hry je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

K matici přičteme $c = 2$:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Budeme řešit duální úlohu

$$\max w = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$$

$$3\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_2 + \eta_3 \leq 1$$

$$2\eta_1 + 6\eta_2 + 4\eta_2 \leq 1$$

$$\left(\begin{array}{c|ccccc} 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & \mathbf{3} & 1/2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|ccccc} 1/3 & 0 & -5/6 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ \hline 1/3 & 1 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 17/3 & \mathbf{10/3} & -2/3 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{c|ccccc} 2/5 & 0 & & 0 & & \\ \hline 3/10 & 1 & & 0 & & \\ 1/10 & 0 & 17/10 & 1 & -1/5 & 3/10 \end{array}\right)$$

Je tedy

$$\eta_1 = \frac{3}{10}, \quad \eta_2 = 0, \quad \eta_3 = \frac{1}{10}, \quad w_{max} = \frac{2}{5}$$

Protože $3\xi_1 + 2\xi_2 = 1$ a $\xi_1 + 4\xi_2 = 1$, je $\xi_1 = \frac{1}{5}$, $\xi_2 = \frac{1}{5}$. Dále je $V = \frac{5}{2}$, takže $\overline{x}_1 = \frac{1}{2}$, $\overline{x}_2 = \frac{1}{2}$, $\overline{y}_1 = \frac{3}{4}$, $\overline{y}_2 = 0$, $\overline{y}_3 = \frac{1}{4}$.

Cena původní hry je $V' = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$.

Příklad (dominance sloupce a řádku). Mějme matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1/2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 6 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Třetí řádek je dominován druhým, první sloupec je dominován pátým, třetí sloupec je dominován druhým. Stačí řešit matici

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

1.4. **Symetrické hry.**

Definice 1.9. Nechť je dána hra s nulovým součtem $\{\widehat{2}, X, Y, M\}$. Řekneme, že je **symetrická**, právě když

(1) $X = Y$,
(2) $M(x, y) = -M(y, x)$ pro každé $x \in X$, $y \in Y$.

Věta 1.10. Má-li symetrická hra řešení, pak je-li $(\overline{x}, \overline{y})$ řešení této hry, je i $(\overline{y}, \overline{x})$ řešení této hry. Cena řešitelné symetrické hry je 0.

Důkaz. Pro řešení hry platí

$$M(x, \overline{y}) \leq M(\overline{x}, \overline{y}) \leq M(\overline{x}, y).$$

Z definice symetrické hry vyplývá, že

$$-M(\overline{y}, x) \leq -M(\overline{y}, \overline{x}) \leq -M(y, \overline{x}).$$

Vynásobením -1 máme

$$M(y, \overline{x}) \leq M(\overline{y}, \overline{x}) \leq M(\overline{y}, x),$$

tedy $(\overline{y}, \overline{x})$ je řešení. Protože $M(\overline{x}, \overline{y}) = -M(\overline{y}, \overline{x}) = M(\overline{y}, \overline{x})$ díky jednoznačnosti ceny hry, je $M(\overline{x}, \overline{y}) = 0$. □