1. Simplexová metoda

Simplexová metoda se používá k řešení úlohy v kanonickém tvaru

$$\begin{aligned} \min z &= cx \\ \mathbf{A}x &= b \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Tabulka simplexové metody: Matici soustavy rovnic $\mathbf{A}x = b$

$$\begin{array}{llllllllll} a_{00} & = -z & & & & + & a_{0,m+1}x_{m+1} & + \cdots + & a_{0n}x_n \\ a_{10} & = & x_1 & & & + & a_{1,m+1}x_{m+1} & + \cdots + & a_{1n}x_n \\ a_{20} & = & & x_2 & & + & a_{2,m+1}x_{m+1} & + \cdots + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & & & \ddots & & & & \\ a_{m0} & = & & & x_m & + & a_{m,m+1}x_{m+1} & + \cdots + & a_{mn}x_n \end{array}$$

zapisujeme do tabulky

$$\left(\begin{array}{c|cccccc} a_{00} & 0 & \dots & 0 & a_{0,m+1} & \dots & a_{0n} \\ \hline a_{10} & 1 & \dots & 0 & a_{1,m+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m0} & 0 & \dots & 1 & a_{m,m+1} & \dots & a_{mn} \end{array}\right)$$

Pokud $a_{i0} \geq 0$ pro $i \in \widehat{m}$, nazýváme tabulku **primárně přípustnou**, je-li $a_{0i} \geq 0$, nazýváme tabulku **duálně přípustnou**.

Je-li tabulka primárně přípustná, vyjadřuje přípustné řešení primární úlohy.

1.1. Algoritmus simplexové metody.

(1) Vyjdu z primárně přípustné tabulky.
(2) Je-li tabulka i duálně přípustná, je optimální a končím.
(3) Pokud není duálně přípustná, mezi sloupci, kde $a_{0i} < 0$ vyberu nějaký **vedoucí sloupec** (s-tý).
(4) Vyberu **vedoucí řádek**: najdu

$$\min \left\{ \frac{a_{i0}}{a_{is}} \,\middle|\, a_{is} > 0 \right\} = \frac{a_{r0}}{a_{rs}} \geq 0$$

(tzv. **prověrka poměrů**) a jako vedoucí zvolím r-tý. x_r bude nová nebazická proměnná a položím

$$x_s = \frac{a_{r0}}{a_{rs}}.$$

Prvek a_{rs} nazýváme **vedoucí prvek** (**pivot**). Pokud jsou všechny $a_{is} \leq 0$, není účelová funkce z omezená, takže končím.

Pokud je v prvním sloupci nějaká nula, prověrka poměrů dá nulu a jsem v blbé situaci, protože nemůžu bezprostředně přejít k jinému vrcholu.

1.2. Časová náročnost.

Teoreticky je exponenciální: maximálně $\binom{m}{n}$.

$$n! \approx \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}$$

$$\binom{n}{\frac{n}{2}} = \frac{n!}{\left(\left(\frac{n}{2}\right)!\right)^2} \approx \frac{\frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}}{\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{e^n}\pi n} = 2^n\sqrt{\frac{2}{\pi n}},$$

tj. řádově 2^n. V praxi se to ale chová polynomiálně, obvykle stačí cca. $2m$ až $3m$ iterací.

1.3. **Nalezení počátečního přípustného bazického řešení.**

(1) Do každé rovnice přidáme tzv. **umělou proměnnou** $x'_i \geq 0$. Dostanu tak soustavu

$$x'_1 + \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j = b_1$$

$$\vdots$$

$$x'_m + \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j = b_m$$

$$\min \xi = \min \sum_{j=1}^{m} x'_j$$

položím $x'_1, \dots, x'_m = b_1, \dots, b_m$, $x_j = 0$ pro $j \in \widehat{n}$.

(a) Je-li $\xi_{min} > 0$, neexistuje přípustné řešení výchozí úlohy.

(b) Je-li $\xi_{min} = 0$, je x přípustné řešení.

(2) Nerovnice typu $\mathbf{A}x \leq b$, $b \geq 0$, $x \geq 0$ převedu na rovnice se slabou proměnnou a slabé proměnné položím rovny b. **Slabé proměnné nejsou v účelové funkci !**

(3) Nerovnice typu

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i \in k, \; b_i \geq 0$$

převedu na rovnice se slabou proměnnou a do každé z nich přidám **stejnou** umělou proměnnou x':

$$x' + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - s_i = b_i, \quad s_i \geq 0, \; x' \geq 0.$$

Buď $\max\{b_i | i \in \widehat{k}\} = b_l$. Soustavu nerovnic převedeme na novou soustavu

$$x' + \sum_{j=1}^{n} a_{lj}x_j - s_l = b_l$$

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{lj} - a_{ij})x_j - s_l + s_i = \underbrace{b_l - b_i}_{\geq 0}, \quad i \in \widehat{k} \setminus \{l\}.$$

Proměnnou s_l položím rovnou nule a proměnné x' a s_i dopočítám. Minimalizuji funkci $\xi = x'$. Neuškodí zopakovat, že **v účelové funkci se v každém případě vyskytují pouze umělé proměnné**.

Pokud mám soustavu, kde jsou rovnice i nerovnice, lze tyto postupy samozřejmě kombinovat.

1.4. **Zacyklení — jak z toho ven.** Zacyklením nazýváme situaci, kdy se při prověrce poměrů vyjde nula. V následujícím kroku se pak nezmění hodnota účelové funkce, protože se k ní tato nula přičte.

Definice 1.1. Buď $x \in \mathbf{R}^n$, $x \neq 0$. Vektor x nazýváme **lexikograficky kladný** ($x \overset{l}{>} 0$), právě když první nenulová složka vektoru x je kladná. Pro dva různé vektory x, y definujeme $x \overset{l}{>} y$, právě když $x - y \overset{l}{>} 0$.

Dantzig: Vycházíme z toho, že prvky nultého řádku jsou jednoznačně určeny volbou báze. Vedoucí sloupec volím stejně, tj. sloupec, v jehož prvním řádku je záporné číslo.

Volba vedoucího řádku: Na počátku musí být všechny řádky lexikograficky kladné (s výjimkou nultého). Pokud nejsou, přečísluji neznámé tak, aby jednotková matice byla nalevo. Kandidáta na vedoucí řádek pak hledám mezi řádky, kde $a_{is} > 0$. Pro každé $a_{is} > 0$ vezmu vektor $(a_{i0}, a_{i1}, \ldots, a_{in})$ a vydělím a_{is}. Získám tak vektory

$$\left(\frac{a_{i0}}{a_{is}}, \frac{a_{i1}}{a_{is}}, \ldots, \frac{a_{in}}{a_{is}}\right).$$

Z těchto vektorů vyberu lexikograficky nejmenší (r-tý) a za vedoucí řádek zvolím r-tý řádek.

Věta 1.2. Při použití Dantzigova pravidla nedojde k zacyklení.

Důkaz. Dokážeme, že v každé další tabulce bude nultý řádek lexikograficky větší a že řádky 1 až m zůstanou lexikograficky kladné.

Platí, že $a_{rs} > 0$. Chceme dokázat, že pro i-tý řádek platí

$$(a_{i0}, \ldots, a_{in}) - \frac{a_{is}}{a_{rs}}(a_{r0}, \ldots, a_{rs}) \overset{l}{>} 0.$$

Pokud $a_{is} = 0$, je to zřejmé. Je-li $a_{is} < 0$, přičítám k lexikograficky kladnému řádku lexikograficky kladný řádek, tedy i-tý řádek zůstane lexikograficky kladný. Pokud $a_{is} > 0$, vydělím nerovnici a_{is} a dostanu

$$\left(\frac{a_{i0}}{a_{is}}, \ldots, \frac{a_{in}}{a_{is}}\right) \overset{l}{>} \left(\frac{a_{r0}}{a_{rs}}, \ldots, \frac{a_{rn}}{a_{rs}}\right).$$

Protože jsem volil vedoucí řádek tak, aby vektor napravo byl lexikograficky nejmenší, je nerovnost splněna.

Pro nultý řádek nastává případ $a_{0s} < 0$, přičítám k němu lexikograficky kladný vektor, takže bude lexikograficky větší. □

Bland: Za vedoucí sloupec se (z kandidátů) zvolí sloupec odpovídající proměnné s nejmenším indexem. Z kandidátů na vyřazení z báze při rovnosti prověrky poměrů vezmeme proměnnou s nejmenším indexem.

Věta 1.3. Při použití Blandova pravidla „nejmenších indexů“ nedojde k zacyklení.

Důkaz. Větu dokážeme sporem. Předpokládejme, že máme degenerovanou úlohu, posloupnost tabulek je nekonečná a žádná z tabulek není optimální. Proměnné rozdělíme na tři typy:

1) nikdy nejsou v bázi,
2) jsou stále v bázi,
3) vyskytují se jak v bázi tak mimo bázi — „běhny“.

Označme

- x_t běhnu s největším indexem,
- D tabulku, v níž je x_t bazická, ale v následující není bazická,
- x_s proměnnou, která je v D nebazická, ale v následující je bazická,
- D^* tabulku, v níž je x_t nebazická, ale v následující je bazická,
- v prvek a_{00} všech tabulek (nemění se),
- $B = \{i \in \widehat{n} | x_i \text{ je v } D \text{ bazická}\}$.
- Pokud řádek vektoru b nebo matice $\mathbf{A}$ indexuji indexem $i \in B$ nějaké bazické proměnné, myslí se tím ten řádek, ve kterém je v i-tém sloupci jednotka.

Tabulka D má tvar

$$z = v + \sum_{j \notin B} c_j x_j$$

$$x_i = b_i - \sum_{j \notin B} a_{ij} x_j, \quad i \in B,$$

nultý řádek tabulky D^* má tvar

$$z = v + \sum_{j=1}^{n} c_j^* x_j.$$

Položme $x_s = y \in \mathbf{R}$, $x_j = 0$ pro $j \notin B$, $j \neq s$. Pak $x_i = b_i - a_{is}y$ pro $i \in B$ a

$$z = v + c_s y = v + c_s^* y + \sum_{i \in B} c_i^* \underbrace{(b_i - a_{is}y)}_{x_i}.$$

Pro každé $y \in \mathbf{R}$ pak platí

$$\left(c_s - c_s^* + \sum_{i \in B} c_i^* a_{is}\right) y = \sum_{i \in B} c_i^* b_i.$$

To je ale možné jen v případě, že koeficienty u y jsou nulové, tedy

$$c_s - c_s^* + \sum_{i \in B} c_i^* a_{is} = 0.$$

Platí, že $c_s < 0$, protože x_s jde v D do báze. Naopak $c_s^* \geq 0$, protože do báze jde v D^* x_t a kdyby $c_s^* < 0$, podle Blandova pravidla by do báze šla x_s. Tedy $c_s - c_s^* < 0$, z čehož plyne, že alespoň jeden sčítanec v sumě je kladný. Tedy existuje $i \in B$ takové, že $c_i^* a_{is} > 0$.

Dokážeme, že x_i je běhna a $i < t$. Proměnná x_i nemůže být v D^* bazická, protože $c_i^* \neq 0$. Protože $a_{ts} > 0$ (je to pivot) a $c_t^* < 0$ (x_t jde do báze), je $c_t^* a_{ts} < 0$. Je proto $i < t$, neboť $c_i^* a_{is} > 0$. Čili x_i je běhna s indexem menším než t.

Proměnná x_i je ve všech tabulkách nulová. Pokud není v bázi, je to jasné a když jde do báze, zůstane nulová, protože prověrka poměrů dá nulu a nulová zůstane i dál, protože nultý sloupec se nemění. V tabulce D má hodnotu b_i, takže $b_i = 0$.

Z toho, že x_i je běhna, plyne, že $c_i^* > 0$, jinak bych musel do báze podle Blandova pravidla zařadit x_i a ne x_t. Protože $c_i^* > 0$, je i $a_{is} > 0$. Z toho plyne, že řádek odpovídající i-té proměnné je rovněž kandidátem na vedoucí řádek. Prověrka poměrů dá nulu ($b_i = 0$ a podle předpokladu i $b_t = 0$), podle Blandova pravidla vybírám řádek odpovídající proměnné s nejmenším indexem, takže v tabulce D se měl volit řádek odpovídající i-té proměnné, což je spor. □

1.5. **Maticový zápis simplexového algoritmu.** Soustavu rovnic simplexové metody

$$\begin{aligned} z &= cx - a_{00} \\ 0 &= -b + \mathbf{A}x \end{aligned}$$

lze zapsat maticově jako

$$\begin{pmatrix} a_{00} & c \\ b & \mathbf{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Buďte $\mathbf{A} = (\mathbf{B}|\mathbf{N})$, kde $\mathbf{B}$ je regulární, $c = (c_\mathbf{B}, c_\mathbf{N})$, $x = \begin{pmatrix} x_\mathbf{B} \\ x_\mathbf{N} \end{pmatrix}$. Dosazením a vynásobením soustavy

$$\begin{pmatrix} a_{00} & c_\mathbf{B} & c_\mathbf{N} \\ b & \mathbf{B} & \mathbf{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ x_\mathbf{B} \\ x_\mathbf{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Bigg| \cdot \begin{pmatrix} 1 & -c_\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1} \\ 0 & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix} \text{ zleva}$$

dostaneme

$$\begin{pmatrix} a_{00} - c_B \mathbf{B}^{-1} b & 0 & c_\mathbf{N} - c_B \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \\ \mathbf{B}^{-1} b & \mathbf{E} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ x_\mathbf{B} \\ x_\mathbf{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix},$$

tj. tabulku simplexové metody.

Označme $c_\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1} = \pi$. Je-li $c_\mathbf{N} - \pi\mathbf{N} \geq 0$, je tabulka duálně přípustná. Označme $\overline{c_j} = c_j - \pi\mathbf{A}_{\bullet j}$ koeficienty v nové matici (platí i pro $c_\mathbf{B}$). Pak $\overline{c_j} \geq 0$, právě když $\pi\mathbf{A}_{\bullet j} \leq c_j$ pro každé $j \in \widehat{n}$ a to právě když $\pi\mathbf{A} \leq c$. Pak ale π splňuje soustavu omezení duální úlohy $y\mathbf{A} \leq c$. Protože $w = yb - a_{00} = \pi b - a_{00} = c_\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}b - a_{00}$, jsou hodnoty účelové funkce stejné a proto je řešení optimální.

1.6. **Duální simplexová metoda.** Vychází se z **duálně přípustné tabulky**.

(1) Pokud je tabulka i primárně přípustná, končím.
(2) Určím vedoucí řádek r, který má v nultém sloupci záporné číslo. Prověrkou poměrů najdu vedoucí sloupec (kandidáti $a_{ri} < 0$), pokud je každé $a_{ri} \geq 0$, neexistuje přípustné řešení. Hledám minimum
$$\min_{a_{rj}<0} \left| \frac{a_{0j}}{a_{rj}} \right| = \left| \frac{a_{0s}}{a_{rs}} \right|,$$
za vedoucí sloupec zvolím s.

1.7. **Modifikovaná (redukovaná) simplexová metoda.** V modifikované metodě se počítají pouze prvky, které jsou právě potřeba. Vychází se vždy z počáteční tabulky. V paměti mám výchozí tabulku a matici $\mathbf{B}^{-1}$. Nové prvky se počítají následujícími vztahy:
$$\overline{b} = \mathbf{B}^{-1} b \qquad \overline{\mathbf{A}}_{\bullet j} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_{\bullet j} \qquad \overline{c}_j = c_j - \pi \mathbf{A}_{\bullet j}, \ \pi = c_{\mathbf{B}} \mathbf{B}^{-1}$$
Pro $k+1$. tabulku potřebujeme spočítat nebazická $\overline{c}_j$, mezi nimi vybereme s-tý vedoucí sloupec $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{\bullet s}$ a provedeme prověrku poměrů s $\overline{b}$. Matici $\mathbf{B}^{-1}$ poté vynásobíme zleva elementárními maticemi, které provedou řádkové úpravy stejné jako v původní simplexové metodě. Postup opakujeme, dokud není $c \geq 0$.

1.8. **Primárně duální simplexová metoda.** Tato metoda kombinuje primární i duální simplexovou metodu. Její výhodou je, že není nutné začínat bazickým přípustným řešením, ovšem účelová funkce musí být omezená, aby měla přípustné řešení i duální úloha.

Nechť primární a duální úloha mají tvar

$$\min z = cx \qquad \mathbf{A}x = b, \quad b \geq 0 \qquad x \geq 0, \tag{1}$$
$$\max w = yb \qquad y\mathbf{A} \leq c. \tag{2}$$

Nejprve nalezneme přípustné řešení duální úlohy.

(1) Buď je $c \geq 0$, v tom případě vyhovuje řešení $\pi = 0$.
(2) Existuje $j \in \widehat{n}$ takové, že $c_j < 0$. V tom případě budeme řešit upravenou úlohu
$$\begin{aligned} \min z &= cx \\ \mathbf{A}x &= b, \quad b \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1} &= \alpha \\ x &\geq 0, \end{aligned} \tag{3}$$
resp.
$$\begin{aligned} \max w &= yb \\ a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m + y_{m+1} &\leq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m + y_{m+1} &\leq c_2 \\ &\vdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m + y_{m+1} &\leq c_n \\ y_{m+1} &\leq 0, \end{aligned} \tag{4}$$
kde α je „hodně velké“ číslo (např. maximální hodnota, kterou počítač snese). Potom $\pi_j = 0$ pro $j \in \widehat{m}$, $\pi_{m+1} = \min_{j \in \widehat{n}} c_j < 0$.

Nechť π je přípustné řešení úlohy (2). Potom podle věty o slabé komplementaritě jsou π a x optimální řešení (2) resp. (1), právě když $\pi(\mathbf{A}x - b) = 0$ a $(c - \pi\mathbf{A})x = 0$. První rovnost platí vždy, protože v primární úloze jsou pouze rovnice, v druhé rovnosti jsou $(c - \pi\mathbf{A})$ i x nezáporné. Aby mohla rovnost platit, musí být všechny složky skalárního součinu nulové.

Je-li $c_j - \pi\mathbf{A}_{\bullet j} > 0$, pak $x_j = 0$. Definujme $\mathcal{J} = \{j \in \widehat{n} | c_j - \pi\mathbf{A}_{\bullet j} = 0\}$. Pak pro každé $j \notin \mathcal{J}$ je $x_j = 0$.

Chceme nakombinovat vektor b ze sloupců matice $\mathbf{A}$ s indexy z $\mathcal{J}$. Budeme řešit pomocnou úlohu

$$\begin{aligned} \min \xi &= \sum_{i=1}^{n} x'_i \\ \sum_{j\in\mathcal{J}} a_{ij}x_j + x'_i &= b_i \\ x_j &\geq 0, \\ x'_i &\geq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Funkce ξ je omezená zdola (nezáporná), existuje přípustné řešení $x'_i = b_i$ pro $i \in \widehat{m}$ a $x_j = 0$ pro $j \in \mathcal{J}$. Úlohu vyřeším „klasickou“ simplexovou metodou. Mohou nastat dva případy:

(1) Je $\xi_{min} = 0$, potom řešení x je optimální.
(2) Je $\xi_{min} > 0$, v tom případě dál řeším úlohu duální k (5):

$$\begin{aligned} \max w &= yb \\ y\mathbf{A}_{\bullet j} &\leq 0, \quad j \in \mathcal{J} \\ y_i &\leq 1, \quad i \in \widehat{m}. \end{aligned} \tag{6}$$

Nechť π je optimální řešení (6). Rozlišíme opět dva případy:

(1) $\overline{\pi}\mathbf{A}_{\bullet j} \leq 0$ pro všechna $j \notin \mathcal{J}$. Potom $\overline{\pi}\mathbf{A} \leq 0$. Dokážeme, že (1) nemá přípustné řešení. Z toho, že $\overline{\pi}\mathbf{A} \leq 0$ vyplývá, že $\pi + \beta\overline{\pi}$, kde $\beta \geq 0$, je přípustné řešení (2).

$$(\pi + \beta\overline{\pi})\mathbf{A}_{\bullet j} = \underbrace{\pi\mathbf{A}_{\bullet j}}_{\leq c_j} + \underbrace{\beta\overline{\pi}\mathbf{A}_{\bullet j}}_{\leq 0} \leq c_j.$$

Protože podle věty o dualitě je $\overline{\pi}b = w_{max} = \xi_{min} > 0$, je

$$w = (\pi + \beta\overline{\pi})b = \underbrace{\pi b}_{\text{konst.}} + \beta \underbrace{\overline{\pi} b}_{>0}$$

a pro $\beta \to +\infty$ se w blíží $+\infty$.

(2) Existuje $j_0 \notin \mathcal{J}$ takové, že $\overline{\pi}\mathbf{A}_{\bullet j_0} > 0$. Označme

$$\theta = \min \left\{ \frac{c_j - \pi\mathbf{A}_{\bullet j}}{\overline{\pi}\mathbf{A}_{\bullet j}} \,\middle|\, \overline{\pi}\mathbf{A}_{\bullet j} > 0 \right\} > 0.$$

Dokážeme, že $\pi' = \pi + \theta\overline{\pi}$ je „lepší“ řešení (2) než bylo π.

$$(\pi + \theta\overline{\pi})\mathbf{A}_{\bullet j} = \pi\mathbf{A}_{\bullet j} + \theta\overline{\pi}\mathbf{A}_{\bullet j} \leq \begin{cases} \pi\mathbf{A}_{\bullet j} \leq c_j \text{ pro } \overline{\pi}\mathbf{A}_{\bullet j} \leq 0 \\ \pi\mathbf{A}_{\bullet j} + \frac{c_j - \pi\mathbf{A}_{\bullet j}}{\overline{\pi}\mathbf{A}_{\bullet j}}\overline{\pi}\mathbf{A}_{\bullet j} = c_j \text{ pro } \overline{\pi}\mathbf{A}_{\bullet j} > 0, \end{cases}$$

takže π' je přípustné. Dále platí $\pi' b = \pi b + \theta\overline{\pi}b > \pi b$, protože $\theta > 0$ a $\overline{\pi}b > 0$.
Vrátím se na začátek, najdu nové $\mathcal{J}$ a opakuji proces.

1.9. **Dopravní problém.** Mám m skladů a n odběratelů. Označme

- a_i, $i \in m$ počet jednotek v i-tém skladu,
- b_j, $j \in n$ požadavek j-tého odběratele,
- c_{ij} přepravní náklad na jednotku z i do j,
- x_{ij} neznámé — kolik se přepravuje z i do j.

Budeme nejprve předpokládat, že nabídka a poptávka jsou stejné, tedy

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = A \geq 0.$$

Dopravní problém lze zapsat jako úlohu LP takto:

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}, \quad \text{kde } c_{ij} > 0$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad \text{kde } j \in \widehat{n}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad \text{kde } i \in \widehat{m}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Máme soustavu $m+n$ rovnic a mn proměnných. Rovnice jsou lineárně závislé, o tom se lze přesvědčit sečtením prvních n rovnic a odečtením dalších m rovnic. Vynecháním kterékoli z nich dostaneme systém $n-1$ nezávislých rovnic.

Věta 1.4. Dopravní problém má přípustné řešení a účelová funkce je omezená zdola, úloha má tedy i optimální řešení.

Důkaz. Úlohu řeší například

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{A}. \quad \square$$

Nalezení počátečního přípustného bazického řešení, metoda severozápadního rohu: Mějme matici proměnných

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Na počátku položme $a'_i = a_i$, $b'_i = b_i$. Začneme u proměnné x_{11}.

(1) Pokud je $a'_1 > b'_1$, položíme $a'_1 \leftarrow a'_1 - b'_1$, $b'_1 \leftarrow 0$ a pokračujeme u x_{12}.
(2) Je-li $a'_1 < b'_1$, položíme $b'_1 \leftarrow b'_1 - a'_1$, $a'_1 \leftarrow 0$ a pokračujeme u x_{21}.
(3) Je-li $a'_1 = b'_1$, položíme $a'_1 \leftarrow 0$, $b'_1 \leftarrow 0$ a pokračujeme u x_{22}.

Takto nalezené řešení je bazické.

Odstranění předpokladu rovnosti nabídky a poptávky: Je-li

$$\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

přidám $m+1$. sklad a položím

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad c_{m+1,j} = 0 \text{ pro každé } j \in \widehat{n}.$$

Analogicky pro převis nabídky.