1. Úvod

Definice 1.1. Úlohou lineárního programování rozumíme nalezení minima (resp. maxima) **účelové funkce**

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

za podmínek

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &\geq b_i, \quad i \in \mathcal{I} \subset \widehat{m},\\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &= b_i, \quad i \in \widehat{m} \setminus \mathcal{I},\\
x_j &\geq 0, \quad j \in \mathcal{J} \subset \widehat{n},\\
x_j &\lesseqqgtr 0, \quad j \in \widehat{n} \setminus \mathcal{J},
\end{aligned}$$

kde

$$c = (c_1, \dots, c_n), \quad \mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{m,n}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = (y_1, \dots, y_n).$$

Každý vektor x vyhovující soustavě omezení nazýváme **přípustným řešením**. Přípustné řešení, na kterém nabývá z extremální hodnoty, nazýváme **optimálním řešením**.

Poznámka. Ekvivalentní formulace úlohy LP:

(1) Hledání maxima funkce z je ekvivalentní hledání minima funkce $-z$.

(2) Převod nerovnic na rovnice zavedením **slabých proměnných**:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - s_i = b_i, \quad s_i \geq 0, \ i \in \mathcal{I}.$$

(3) Převod rovnic na nerovnice:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \leq 0.$$

(4) Odstranění proměnných bez podmínky nezápornosti: Buď $x_j \in \mathbf{R}$, $j \in \widehat{n} \setminus \mathcal{J}$. Zavedeme proměnné x_0 a x'_j, dosadíme $x_j = x'_j - x_0$ a přidáme podmínky $x_0 \geq 0$, $x'_j \geq 0$ pro $j \in \widehat{n} \setminus \mathcal{J}$.

Věta 1.2. Z následujících dvou soustav lineárních rovnic

(i) $\mathbf{A}x = b$ $(b \neq 0)$,

(ii) $y\mathbf{A} = 0$, $yb \neq 0$

má řešení právě jedna z nich.

Důkaz. 1) Buď (i) řešitelná. Pak $b \in [\mathbf{A}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{A}_{\bullet n}]_\lambda$. Buď $y\mathbf{A} = 0$, takže $y \in [\mathbf{A}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{A}_{\bullet n}]_\lambda{}^\perp$, tedy $y \perp b$ a $yb = 0$, což je spor.

2) Buď (i) neřešitelná, tedy $b \notin [\mathbf{A}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{A}_{\bullet n}]_\lambda = P$. Platí, že $P \oplus P^\perp = \mathbf{R}^{m,1}$, $b = u + v$, kde $u \in P$, $v \in P^\perp$. Platí, že $v \neq 0$, protože $b \notin P$.

Protože $v \in P^\perp$, je $v^T\mathbf{A} = 0$ a $v^T b = v^T u + v^T v = 0 + \|v\|^2 \neq 0$. Tedy v řeší (ii). □

Věta 1.3. Z následujících dvou výroků

(i) $\mathbf{A}x = b$ $(b \neq 0)$ má nezáporné řešení,

(ii) $y\mathbf{A} \geq 0$, $yb < 0$ má řešení

je pravdivý právě jeden.

Důkaz. 1) (i) a (ii) nemohou platit najednou: Buď $\mathbf{A}x = b$, $x \geq 0$, vynásobením y zleva a použitím (ii) dostáváme $y\mathbf{A}x = yb < 0$. Buď $y\mathbf{A} \geq 0$, $yb < 0$, pak $y\mathbf{A}x \geq 0$, což je spor.

2) (i) neplatí $\implies$ (ii) platí: Nechť $\mathbf{A}x = b$ nemá nezáporné řešení:

A) $\mathbf{A}x = b$ nemá žádné řešení. Pak podle předchozí věty existuje $\overline{y}$ takové, že $y\mathbf{A} = 0$, $yb \neq 0$. (ii) vyhovuje buď y nebo $-y$.

B) $\mathbf{A}x = b$ je řešitelná, ale nemá nezáporné řešení: Důkaz provedeme indukcí podle počtu sloupců n.
Buď $n = 1$, $A_{\bullet 1}x_1 = b$, $x_1 < 0$. Definujme $y = -b^T$, pak

$$y\mathbf{A} = -b^T\mathbf{A}_{\bullet\mathbf{1}} = \frac{-b^T b}{x_1} = \frac{-\|b\|^2}{x_1} > 0$$

a $yb = -b^T b = -\|b\|^2 < 0$, tedy (ii) má řešení.
Přechod $n-1 \to n$: Nechť soustava $\mathbf{A}x = b$ má řešení, ale ne nezáporné. Pak ani soustava

$$\sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{A}_{\bullet j} x_j = b$$

nemá nezáporné řešení, tedy existuje $\overline{y}$ takové, že $\overline{y}A_{\bullet j} \geq 0$ pro $j \in \widehat{n-1}$ a $\overline{y}b < 0$.

a) Je-li $\overline{y}\mathbf{A}_{\bullet n} \geq 0$, je $\overline{y}\mathbf{A} \geq 0$, takže (ii) má řešení.

b) Buď $\overline{y}\mathbf{A}_{\bullet n} < 0$. Uvažujme soustavu

$$\sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{A}'_{\bullet j} x'_j = b',$$

kde

$$\mathbf{A}'_{\bullet j} = \mathbf{A}_{\bullet j} - \frac{\overline{y}\mathbf{A}_{\bullet j}}{\overline{y}\mathbf{A}_{\bullet n}}\mathbf{A}_{\bullet n},$$

$$b' = b - \frac{\overline{y}b}{\overline{y}\mathbf{A}_{\bullet n}}\mathbf{A}_{\bullet n}.$$

Dále platí

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left(\mathbf{A}_{\bullet j} - \frac{\overline{y}\mathbf{A}_{\bullet j}}{\overline{y}\mathbf{A}_{\bullet n}}\mathbf{A}_{\bullet n}\right) x'_j = b - \frac{\overline{y}b}{\overline{y}\mathbf{A}_{\bullet n}}\mathbf{A}_{\bullet n},$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{A}_{\bullet j} x'_j + \underbrace{\left(\frac{\overline{y}b}{\overline{y}\mathbf{A}_{\bullet n}} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\overline{y}\mathbf{A}_{\bullet j}}{\overline{y}\mathbf{A}_{\bullet n}} x'_j\right)}_{>0} \mathbf{A}_{\bullet n} = b.$$

Tato soustava nemá nezáporné řešení, protože jinak by měla nezáporné řešení soustava $\mathbf{A}x = b$ a to je spor s předpokladem. Existuje tedy $\overline{y}'$ takové, že $\overline{y}'\mathbf{A}'_{\bullet j} \geq 0$ a $\overline{y}'b' < 0$ pro $j \in \widehat{n-1}$. Definujme

$$y = \overline{y}' - \frac{\overline{y}'\mathbf{A}_{\bullet n}}{\overline{y}\mathbf{A}_{\bullet n}}\overline{y}.$$

Pro $j \in \widehat{n-1}$ pak platí

$$y\mathbf{A}_{\bullet j} = \overline{y}'\mathbf{A}_{\bullet j} - \frac{\overline{y}'\mathbf{A}_{\bullet n}}{\overline{y}\mathbf{A}_{\bullet n}}(\overline{y}\mathbf{A}_{\bullet j}) = \overline{y}'\left(\mathbf{A}_{\bullet j} - \frac{\overline{y}\mathbf{A}_{\bullet j}}{\overline{y}\mathbf{A}_{\bullet n}}\mathbf{A}_{\bullet n}\right) = \overline{y}'\mathbf{A}'_{\bullet j} \geq 0.$$

$$y\mathbf{A}_{\bullet n} = \overline{y}'\mathbf{A}_{\bullet n} - \frac{\overline{y}'\mathbf{A}_{\bullet n}}{\overline{y}\mathbf{A}_{\bullet n}}\overline{y}\mathbf{A}_{\bullet n} = 0.$$

$$yb = \overline{y}'b - \frac{\overline{y}'\mathbf{A}_{\bullet n}}{\overline{y}\mathbf{A}_{\bullet n}}\overline{y}b = \overline{y}'\left(b - \frac{\overline{y}b}{\overline{y}\mathbf{A}_{\bullet n}}\mathbf{A}_{\bullet n}\right) = \overline{y}'b' < 0. \quad \square$$

Věta 1.4 (Farkaš)**.** Z následujících dvou soustav lineárních nerovnic

(i) $\mathbf{A}x \leq b$ $(b \neq 0)$,

(ii) $y\mathbf{A} \geq 0$, $yb < 0$

má nezáporné řešení právě jedna z nich.

Důkaz. Buď s vektor slabých proměnných

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}.$$

Potom $\mathbf{A}x + s = b$, právě když $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{x} = b$, kde $\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}|\mathbf{E})$,

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}.$$

Podmínka nezápornosti řešení $\mathbf{A}x \leq b$ je ekvivalentní s nezáporností řešení $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{x} = b$.

Dále platí, že $y\tilde{\mathbf{A}} \geq 0$, právě když $y\mathbf{A} \geq 0$ a $y \geq 0$. Soustava $y\mathbf{A} \geq 0$, $yb < 0$ má nezáporné řešení, právě když $y\tilde{\mathbf{A}} \geq 0$, $yb < 0$ má řešení. Tím jsme větu převedli na předchozí. □

Důsledek 1.5. Z následujících dvou soustav lineárních nerovnic

(1) $\mathbf{A}x \geq b$,
(2) $y\mathbf{A} \leq 0$, $yb > 0$

má nezáporné řešení právě jedna.

Důkaz. Vynásobíme nerovnice -1. □

Věta 1.6. Nechť $\mathbf{K} \in \mathbf{R}^{n,n}$ je čtvercová matice n-tého řádu, antisymetrická (tj. $\mathbf{K}^T = -\mathbf{K}$). Soustava lineárních nerovnic $\mathbf{K}x \geq 0$, $x \geq 0$ má alespoň jedno řešení $\overline{x}$ takové, že $\mathbf{K}\overline{x} + \overline{x} > 0$.

Důkaz. Buď

$$\overline{x}_i = \begin{pmatrix} \overline{x}_{i_1} \\ \vdots \\ \overline{x}_{i_n} \end{pmatrix} \quad \text{pro } i \in \widehat{n}$$

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i$$

Položme $\mathbf{A} = \mathbf{K}$, $b = e_i^T$. Pak podle předchozí věty může nastat právě jeden ze dvou případů:
1) $\mathbf{K}\overline{x}_i \geq e_i^T \geq 0$, tedy $\mathbf{K}_{i\bullet}\overline{x}_i \geq 1$.
2) $\overline{x}_i^T e_i^T > 0 \iff \overline{x}_{ii} > 0$, $\overline{x}_i^T\mathbf{K} \leq 0 \iff \mathbf{K}^T\overline{x}_i \leq 0 \iff -\mathbf{K}\overline{x}_i \leq 0 \iff \mathbf{K}\overline{x}_i \geq 0$.
V obou případech je $\mathbf{K}_{i\bullet}\overline{x}_i + \overline{x}_{ii} > 0$, takže $\mathbf{K}\overline{x} + \overline{x} > 0$. □

Věta 1.7. Soustava lineárních nerovnic

$$\begin{aligned} \mathbf{A}x - tb &\geq 0 \\ -y\mathbf{A} + tc &\geq 0 \\ yb - cx &\geq 0 \end{aligned}$$

má alespoň jedno řešení x_0, y_0, t takové, že

$$\begin{aligned} \mathbf{A}x_0 - t_0 b + y_0^T &> 0 \\ -y_0\mathbf{A} + t_0 c + x_0^T &> 0 \\ y_0 b - cx_0 + t_0 &> 0. \end{aligned}$$

Důkaz.

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{A} & -b \\ -\mathbf{A}^T & 0 & c^T \\ b^T & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^T \\ x \\ t \end{pmatrix} \geq 0. \quad \square$$