1 Životní pojištění

1.0.1 Druhy životního pojištění

Podle druhu pojistné události můžeme rozdělit životní pojištění na:

Pojištění pro případ smrti: Klient platí pojistné a v případě smrti je jeho pozůstalým vyplacena předem stanovená částka.

Pojištění pro případ dožití: Klient platí pojistné a po předem určené době je mu vyplacena předem stanovená částka. To však jen v případě, že se konce pojištění dožil.

Pojištění důchodové: Klient platí pojistné a pojišťovna mu průběžně vyplácí stanovené částky do konce pojištění nebo do klientovy smrti.

Kromě těchto tří základních typů existují i různé kombinace, jako například pojištění pro případ dožití s výhradou vrácení pojistného v případě smrti.

Druhy pojištění:

- tradiční (TR) - investiční riziko nese pojišťovna
- investiční (INV) - investiční riziko nese klient, není sjednáno rizikové pojištění
- investiční s rizikem (INS) - investiční riziko nese klient, je sjednáno rizikové pojištění

1.1 Demografie

Základním zdrojem informací pro navrhování životního pojištění jsou **úmrtnostní tabulky**. Cílem těchto tabulek je určit pravděpodobnost úmrtí člověka v daném věku. Příklad části tabulky je na Obr. 1.1 a data ve formě grafu na Obr. 1.2 a Obr. 1.3. Tabulky se dají stáhnout na: `http://www.czso.cz/csu/redakce.nsf/i/umrtnostni_tabulky` (16. 10. 2012).

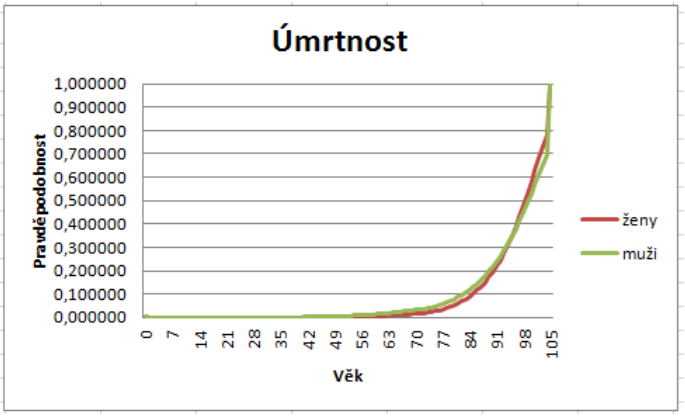
Označení veličin:

Přednáška	Tabulka	Popis
l_x	Px	Počet žijících lidí ve věku x
d_x	Dx	Počet lidí, kteří zemřeli ve věku x
q_x	qx	$d_x/l_x = (l_x - l_{x+1})/l_x$ - odhad pravděpodobnosti úmrtí ve věku x
p_x	$\emptyset$	$1 - q_x$ - odhad pravděpodobnosti přežití od x do $x + 1$

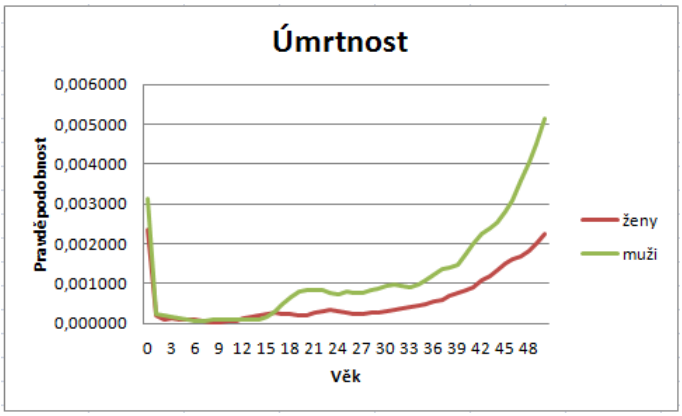
Někdy se používá vzorec pro aproximaci l_x:

2011		Česká republika						
				Ženy *Females*				
věk *age*	Dx	Px	qx	lx	dx	Lx	Tx	ex
0	124	55470	0,002345	100000	234	99805	8074067	80,74
1	12	58701	0,000204	99766	20	99755	7974262	79,93
2	5	59684	0,000084	99745	8	99741	7874507	78,95
3	8	58922	0,000136	99737	14	99730	7774766	77,95
4	2	55363	0,000088	99723	9	99719	7675036	76,96
5	8	51429	0,000097	99714	10	99710	7575317	75,97
6	3	48902	0,000091	99705	9	99700	7475607	74,98
7	4	46727	0,000079	99696	8	99692	7375907	73,98
8	3	45671	0,000038	99688	4	99686	7276215	72,99
9	0	44952	0,000036	99684	4	99682	7176529	71,99
10	2	44179	0,000055	99680	5	99678	7076847	71,00
11	4	43688	0,000075	99675	8	99671	6977170	70,00
12	7	43770	0,000133	99667	13	99661	6877498	69,00
13	5	44028	0,000172	99654	17	99646	6777838	68,01
14	11	44248	0,000199	99637	20	99627	6678192	67,03

Obrázek 1.1: Začátek úmrtnostní tabulky.



Obrázek 1.2: Graf úmrtnosti v celém rozsahu - je zde vidět exponenciální nárůst pravděpodobnosti úmrtí.



Obrázek 1.3: Graf úmrtnosti do 50 let - pro znázornění zajímavého průběhu v nižším věku.

$$l_x = Cs^x k^{g^x}, \tag{1.1}$$

kde C, s, k a g jsou nějaké parametry. Celková populace tedy exponenciálně roste.

Další značení je: ${}_uq_x$ je pravděpodobnost úmrtí v intervalu délky u. U časových úseků u kratších než jeden rok se často používá aproximace ${}_uq_x = uq_x$. Dále ${}_np_x$ je pravděpodobnost přežití n let po věku x.

Ve výpočtech se používá takzvané **pravidlo nezávislosti** (dva ekvivalentní zápisy):

$$ {}_np_x = {}_mp_x \cdot {}_{n-m}p_{x+m}, \tag{1.2}$$

$$ {}_{a+b}p_x = {}_ap_x \cdot {}_bp_{x+a}, \tag{1.3}$$

kde obecně $m, n, a, b \in \mathbb{R}$ (typicky $\mathbb{N}$), $m < n$. Pro pravděpodobnost úmrtí platí:

$$ {}_2q_x = q_x + p_x . q_{x+1} \tag{1.4}$$

1.2 Časová hodnota peněz ("Všichni jistě znáte...")

Peníze, které v daném okamžiku vlastníme můžeme v principu vždy nějak investovat a tím zhodnotit. Pokud provádíme nějaké výpočty (odhady do budoucnosti), musíme vždy zařídit, aby všechny uvažované částky odpovídaly stejnému časovému okamžiku. Proto zvolíme jistou míru časového zhodnocení peněz a částky, které jsou k dispozici dříve patřičně zúročíme. (1000 Kč teď má větší hodnotu, než 1000 Kč za rok.)

Zavádíme pojem **technická úroková míra** (úroková sazba) (značení i nebo j). Udává zhodnocení **jistiny** po jednom roce: pro i=2% se zhodnotí 1000 Kč $\rightarrow$ 1020 Kč.

Pro ocenění peněz v transakcích před uvažovaným časem se hodí zavést veličinu **diskont** (úročitel): $v = \frac{1}{1+i}$. Za jeden rok dojde ke zhodnocení $1 \rightarrow 1 + i$ nebo $v \rightarrow 1$. (Zavádění všemožného značení je zřejmě v pojišťovnictví velmi oblíbenou činností ;-).)

Nacházíme-li se na konci roku t, pak 1000 Kč, které jsme dostali před n lety má dnes hodnotu $1000 * (1 + i)^n$ a 1000 Kč, které dostaneme ze m let, má pro nás dnes hodnotu $1000 * v^m = 1000/(1 + i)^m$.

Příklad 1.1. Uložíme si do banky 1000 Kč na 3 roky s úrokem $i = 10\% = 0.1$, a tedy diskont $v = 1/(1 + 0.1) = 0.909$.

	s úročením		s diskontem	
Doba	výpočet	hodnota	výpočet	hodnota
vklad	1000	1000	$1000 * d^3$	751.31
konec 1. roku	$1000 * (1+i)$	1100	$1000 * d^3 * (1+i) = 1000 * d^2$	826.45
konec 2. roku	$1000 * (1+i)^2$	1210	$1000 * d^3 * (1+i)^2 = 1000 * d^1$	909.09
konec 3. roku	$1000 * (1+i)^3$	1331	$1000 * d^3 * (1+i)^3 = 1000 * d^0$	1000

Popsaný způsob připisování úroku se nazývá **polhůtní**. Druhou možností je předlhůtní úročení, kde se úroky vyplácejí hned na začátku daného období, ale v přednášce to nebude potřeba.

Dalším rozdělením je na úročení **jednoduché** a **složené**. Výše jsme uvedli variantu složeného úročení, kde se vždy dělají úroky nejen z jistiny, ale i z předešlých úroků. (Nárůst je tedy exponenciální.) Budoucí hodnota peněz (FV - "future value") po n časových úsecích (třeba letech, měsících, dnech,...) s úrokem i na jeden časový úsek se pak počítá ze současné hodnoty(PV - "present value") jako:

$$FV = PV * (1+i)^n. \tag{1.5}$$

Varianta jednoduchého úročení, kde se počítají vždy jen úroky z jistiny (lineární nárůst), se používá především pro časové periody kratší, než jedno úrokové období. Výpočet pak má tvar:

$$FV = PV * (1 + n * i) = PV * (1 + i\frac{t}{360}), \tag{1.6}$$

kde t je počet dní od začátku úročení a i je úrok za 360 dní.

V případě, že máme smlouvu třeba na 5 let a 3 měsíce, používá se tzv. **smíšené** úročení, tedy pro celé roky složené a zbylou část jednoduché.

1.3 "Spravedlivé" pojištění

V této části se budeme zabývat pojištěním, které podléhá takzvanému **principu spravedlnosti** (**principu ekvivalence**). Tento princip je popsán rovností:

$$E(platby_klienta) = E(platby_pojistovny), \tag{1.7}$$

kde $E()$ značí střední hodnotu. Jedná se o model, ve kterém se neuvažují administrační a další výdaje pojišťovny (platy zaměstnanců, lékařské prohlídky,...) a pojišťovna nemá žádný zisk. Vše, co od klientů vybere jim zase rozdá zpět.

1.3.1 Motivační příklad

Uvažujme nejprve situaci, kdy je klient pojištěn na n let, platí pojistné P ročně a zatím předpokládáme, že během této doby nezemře. Na začátku tedy zaplatí P. Na začátku dalšího roku pojišťovna dostane znovu částku P a navíc má první platbu, která se zatím zhodnotila na $P(1+i)$, tedy celkem $P(1+(1+i))$. Na konci druhého roku má pojišťovna $P(1+(1+i)+(1+i)^2)$ atd. až na konci n-tého roku $P\sum_{k=0}^{n-1}(1+i)^k$. Tím jsme určili celkovou hodnotu peněz, kterými pojišťovna disponuje na konci pojištění, tedy takzvanou **koncovou hodnotu**.

Naopak vyjádříme celkovou hodnotu těchto plateb v okamžiku začátku pojištění (**počáteční hodnotu**. První platba má tedy hodnotu P. Druhá platba (na začátku druhého roku) má na začátku prvního roku hodnotu Pv, třetí platba Pv^2 atd. Celkově dostáváme výraz výraz $P\sum_{k=0}^{n-1} v^k$.

Pro zjednodušení vzorců zavádíme následující označení. Symbolem $\ddot{s}_{\bar{n}}$ značíme koncovou hodnotu a $\ddot{a}_{\bar{n}}$ počáteční hodnotu n ročních plateb (z jednotky peněz, tedy 1Kč, 1$,...) při polhůtním úročení (to značí ta "přehláska"). Tedy konkrétně:

$$\ddot{s}_{\bar{n}} = \sum_{k=0}^{n-1}(1+i)^k = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-1}, \tag{1.8}$$

$$\ddot{a}_{\bar{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1}. \tag{1.9}$$

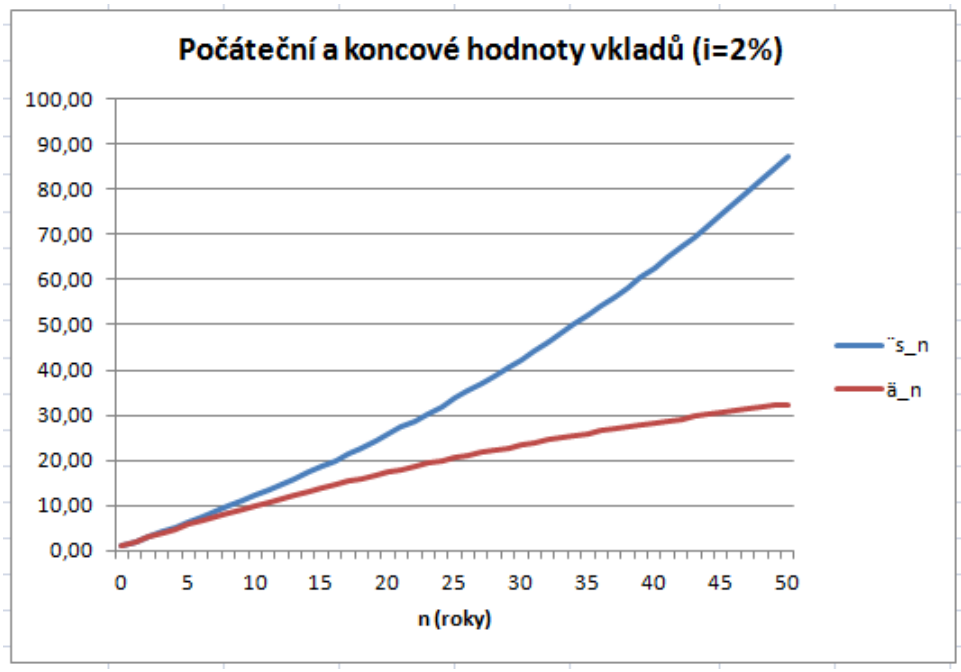
Nyní stačí pro určení koncové hodnoty n ročních plateb po částkách P vynásobit $P\ddot{s}_{\bar{n}}$ a pro počáteční hodnotu $P\ddot{a}_{\bar{n}}$. Zřejmě platí rovnost $\ddot{a}_{\bar{n}}(1+i)^{n-1} = \ddot{s}_{\bar{n}}$. Graf pro různé hodnoty n je na Obr. 1.4.

V reálu však klient pochopitelně platí pouze, pokud je naživu, a proto musíme požít formule

$$\ddot{s}_{x,\bar{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_x(1+i)^k, \tag{1.10}$$

$$\ddot{a}_{x,\bar{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_x v^k. \tag{1.11}$$

Zde ${}_kp_x$ je pravděpodobnost, že člověk, který byl na začátku ve věku x, bude žít ještě k let.



Obrázek 1.4: Závislost $\ddot{s}_{\bar{n}}$ a $\ddot{a}_{\bar{n}}$ na n.

Další skutečností je to, že v případě smrti musí pojišťovna vyplatit plnění ve výši K. Předpokládejme nyní, že pojišťovna pojišťuje celou populaci, potom její finanční bilance bude následující (první tři roky):

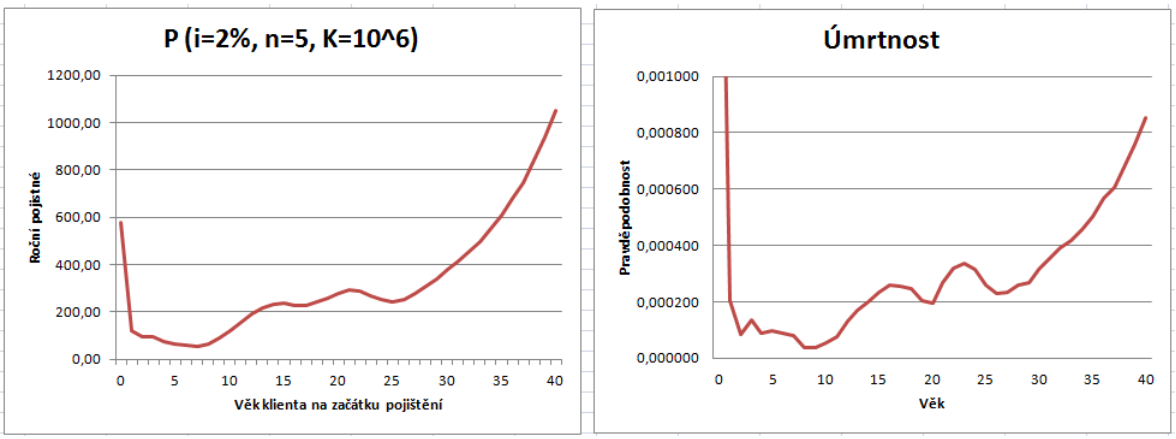
Rok	příjmy (na zač. roku)	výdaje (na konci roku)	finance poj. na konci roku
1. rok	$l_x P$	$d_x K$	$P l_x(1+i) - K d_x$
2. rok	$l_{x+1} P$	$d_{x+1} K$	$P(l_x(1+i)^2 + l_{x+1}(1+i)) - K(d_x(1+i) + d_{x+1})$
3. rok	$l_{x+2} P$	$d_{x+1} K$	$P(l_x(1+i)^3 + l_{x+1}(1+i)^2 + l_{x+2}(1+i)) - K(d_x(1+i)^2 + d_{x+1}(1+i) + d_{x+2})$

Jelikož chceme, aby finance pojišťovny na konci pojištění byly rovny nule, musí platit rovnost (pro pojištění na n let):

$$P \sum_{k=0}^{n-1} l_{x+k}(1+i)^{n-k} = K \sum_{k=0}^{n-1} d_{x+k}(1+i)^{n-k-1}. \tag{1.12}$$

Nyní celý vztah převedeme do hodnot na začátku pojištění vynásobením celé rovnice výrazem d^n a dostaneme:

$$P \sum_{k=0}^{n-1} l_{x+k} d^k = K \sum_{k=0}^{n-1} d_{x+k} d^{k+1}. \tag{1.13}$$



Obrázek 1.5: Závislost P na x pro $n = 5$ a $K = 1000000$ a graf úmrtnosti pro srovnání.

Ze získaného vzorce můžeme například jednoduše určit výši pojistného P ve tvaru:

$$P = K\frac{\sum_{k=0}^{n-1} d_{x+k}d^{k+1}}{\sum_{k=0}^{n-1} l_{x+k}d^k} = K\frac{\sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_x q_{x+k}d^{k+1}}{\sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_x d^k}, \tag{1.14}$$

kde jsme pro odvození druhé rovnosti rozšířili zlomek výrazem $1/l_x$ a použili vztahy:

$$\frac{d_{x+k}}{l_x} = \frac{d_{x+k}}{l_{x+k}}\frac{l_{x+k}}{l_x} = (q_{x+k})({}_kp_x). \tag{1.15}$$

Pro ilustraci je na Obr. 1.5 znázorněna hodnota pojistného pro různý počáteční věk klienta (ženy) pro pojištění na $n = 5$ let a pojistnou částku $K = 1000000$ Kč. Jak je vidět tato závislost kopíruje pravděpodobnost úmrtí, jen ji určitým způsobem vyhladí (sčítáním přes 5 let).

1.3.2 Deterministický a statistický přístup

Dosud jsme používali veličiny jako l_x a p_x intuitivně. Nyní vyjasníme dva možné přístupy. **Deterministický** přístup používá přímo skutečná data z předchozích let popsaná veličinami l_x, d_x a podobně. Každý výpočet nám dává přesný deterministický výsledek, ale pochopitelně máme k dispozici pouze historická data. Následně předpokládáme, že v budoucnu bude situace podobná.

Ve **statistickém** přístupu pracujeme s hodnotami p_x a q_x a náhodnými veličinami. Hodnoty pravděpodobností p_x a q_x určujeme opět především z dat z minulých období. Můžeme ale

zohlednit i jiné okolnosti, které se oproti minulému roku změnily. Základem však stále je vztah:

$$p_x = \frac{d_x}{l_x}. \tag{1.16}$$

1.3.3 Druhy plateb pojistného

Pojistné může být zaplaceno **jednorázově**, tedy celé na začátku pojištění. Poté již klient jen využívá služeb pojišťovny (důchod, peníze v případě smrti,...). Častější variantou je pak placení pojistného **běžně**, kdy klient platí průběžně (nejčastěji ročně). Běžné placení se dále dělí na dvě varianty:

- Po celou dobu pojištění
- Po zkrácenou dobu trvání pojištění - Počet plateb klienta je omezen a ten poté třeba jen přijímá důchod.

1.3.4 Příklady životního pojištění

Nyní uvedeme několik příkladů různých kombinací pojištění a plateb a zavedeme přitom označení několika veličin. Ve všech příkladech označujeme symbolem K pojistnou částku, D výši ročního důchodu, P pojistné (placené jednorázově nebo ročně), n délku pojištění.

Příklad 1.2. **Pojištění pro případ dožití placené jednorázově**: Hodnotu peněz budeme vztahovat k začátku pojištění, a tedy příjem pojišťovny je přímo roven P. Z hlediska výdajů mohou nastat dvě situace. Klient do n let zemře, a tedy nedostane nic. Druhá možnost je, že se dožije konce pojištění, což nastane s pravděpodobností ${}_np_x$. Částka, kterou pojišťovna zaplatí je K a její hodnota je Kv^n. Z principu spravedlnosti tedy dostáváme vztah:

$$P = E(platby_klienta) = E(platby_poj.) = K\,{}_np_x v^n. \tag{1.17}$$

Zavádíme veličinu:

$$E_{x,\bar{n}} = {}_np_x v^n. \tag{1.18}$$

S její pomocí můžeme výsledek předchozího příkladu napsat jako: $P = KE_{x,\bar{n}}$. Alternativní označení této veličiny je $A_{x\bar{n}}^{\;\;1}$. Zde se A používá pro pojištění pro případ smrti respektive dožití, což se rozlišuje umístěním jednotky nad x respektive nad n.

Příklad 1.3. **Pojištění pro případ smrti placené jednorázově**: Příjem pojišťovny je opět P a její výdaje jsou uvedeny v následující tabulce.

Rok	Pravd. že klient zemře (v tomto roce)	Případné výdaje (na konci roku)
1. rok	q_x	Kv
2. rok	$p_x q_{x+1}$	Kv^2
3. rok	${}_2p_x q_{x+2}$	Kv^3
...	...	...
n-tý rok	${}_np_x q_{x+n}$	Kv^{n+1}

Nyní opět použijeme princip ekvivalence a dostaneme rovnost

$$P = E(platby_klienta) = E(platby_poj.) = K \sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_x q_{x+k} v^{k+1}. \tag{1.19}$$

Můžeme použít značení zavedené v předešlém případě a pomocí veličiny $A^1_{x\bar{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_x q_{x+k} v^{k+1}$ a psát pojistné jako $P = KA^1_{x\bar{n}}$

Příklad 1.4. **Důchodové pojištění placené jednorázově**: Příjem pojišťovny je opět P a její výdaje jsou uvedeny v následující tabulce.

Rok	Pravd. že klient žije (v tomto roce)	Výdaje (na začátku roku)
1. rok	${}_0p_x = 1$	D
2. rok	${}_1p_x$	Dv^1
3. rok	${}_2p_x$	Dv^2
...	...	...
n-tý rok	${}_np_x$	Dv^n

Nyní opět použijeme princip ekvivalence a dostaneme rovnost

$$P = E(platby_klienta) = E(platby_poj.) = D \sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_x v^k. \tag{1.20}$$

Nyní můžeme využít již dříve zavedeného značení a psát $P = D\ddot{a}_{x,\bar{n}}$. Smysluplnější variantou tohoto příkladu je takzvaný **odložený důchod**, kde klient začne dostávat peníze až po uplynutí určitého počtu let m. Pro odložený důchod použijeme značení ${}_m\ddot{a}_{x,\bar{n}} = \sum_{k=m}^{n+m-1} {}_kp_x v^k$ a střední hodnota plateb pojišťovny pak je $D_m\ddot{a}_{x,\bar{n}}$.

Důchodové pojištění se také uzavírá až do konce života. Pak používáme značení $\ddot{a}_{x,\overline{\omega-x}}$, což značí výpočet do konce úmrtnostních tabulek.

Pro kombinované pojištění pro případ smrti nebo dožití se používá značení $A_{x\bar{n}} = A^1_{x\bar{n}} + A_{x\bar{n}}^{\ 1} = A^1_{x\bar{n}} + E_{x\bar{n}}$.

1.3.5 Pojištění s nekonstantní pojistnou částkou

Pro pojištění, kde platby pojišťovny nejsou v čase konstantní nebo i v jiné situaci (viz dále: pojištění s výhradou vrácení pojistného) se vetšinou pro jednoduchost používá lineární závislost. Jako obvykle si tedy zavedeme nějaké označení. Pro rostoucí (increasing) hodnoty používáme (pojištění pro případ smrti):

$$(IA)^1_{x\bar{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)_k p_x q_{x+k} v^{k+1}. \tag{1.21}$$

Někdy se však stejné označení používá i pro "normalizovaný"výraz $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} {}_k p_x q_{x+k} v^{k+1}$. Dále pro číslování od nuly (první člen je nulový):

$$(iA)^1_{x\bar{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} (k)_k p_x q_{x+k} v^{k+1}. \tag{1.22}$$

Obdobně pro klesající (decreasing) hodnoty máme:

$$(DA)^1_{x\bar{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)_k p_x q_{x+k} v^{k+1}. \tag{1.23}$$

1.3.6 Valorizace důchodu

Valorizace je způsob náhrady negativního vlivu inflace na hodnotu peněz v budoucnu. Může probíhat tak, že se vyplácená částka každým rokem vynásobí hodnotou $(1+g)$, kde g určuje výši valorizace a může mít například hodnotu $g = 0,02$. Pro střední hodnotu peněz vyplacených na doživotní důchod pak dostáváme výraz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1+g)^k {}_k p_x v^k = \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^k, \tag{1.24}$$

kde suma je ve skutečnosti konečná, jelikož pravděpodobnost dožití je od určitého věku nulová. Můžeme si všimnout, že se jedná o stejný výraz jako bez valorizace, kde však použijeme jinou hodnotu technické úrokové míry $z = \frac{1+i}{1+g} - 1$.

1.3.7 Běžně placené pojištění

Výrazy pro běžně placené pojištění jsou stejné jako ty pro důchody, jen je nyní platí klient pojišťovně. Tak například pro pojištění pro případ smrti placené běžně máme:

$$KA^1_{x\bar{n}} = P\ddot{a}_{x,\bar{n}}, \tag{1.25}$$

a tedy

$$P = K\frac{A^1_{x\bar{n}}}{\ddot{a}_{x,\bar{n}}}. \tag{1.26}$$

Obdobně pro případ dožití:

$$P = K\frac{E_{x\bar{n}}}{\ddot{a}_{x,\bar{n}}}, \tag{1.27}$$

pro důchodové pojištění

$$P = D\frac{\ddot{a}_{x,\bar{n}}}{a_{x,\bar{n}}}, \tag{1.28}$$

které moc nemá smysl, ale můžeme použít odložený důchod:

$$P = D\frac{{}_m\ddot{a}_{x,\bar{n}}}{\ddot{a}_{x,\overline{m}}} \tag{1.29}$$

a pro případ smrti nebo dožití:

$$P = K\frac{A^1_{x\bar{n}} + E_{x\bar{n}}}{\ddot{a}_{x,\bar{n}}}. \tag{1.30}$$

Existuje i pojištění pro případ dožití s výhradou vrácení pojistného v případě smrti, kde dostáváme:

$$KE_{x\bar{n}} + P(IA)^1_{x\bar{n}} = P\ddot{a}_{x,\bar{n}}, \tag{1.31}$$

tedy

$$P = K\frac{E_{x\bar{n}}}{\ddot{a}_{x,\bar{n}} - (IA)^1_{x\bar{n}}}. \tag{1.32}$$

1.3.8 Netto rezervy

Označení "netto"značí, že se stále pohybujeme v oblasti "spravedlivého"pojištění, a tedy neuvažujeme výdaje pojišťovny ani její záměr zisku.

Pro pojištění jako celek tedy platí:

$$E(platby_klienta) = E(platby_poj.). \tag{1.33}$$

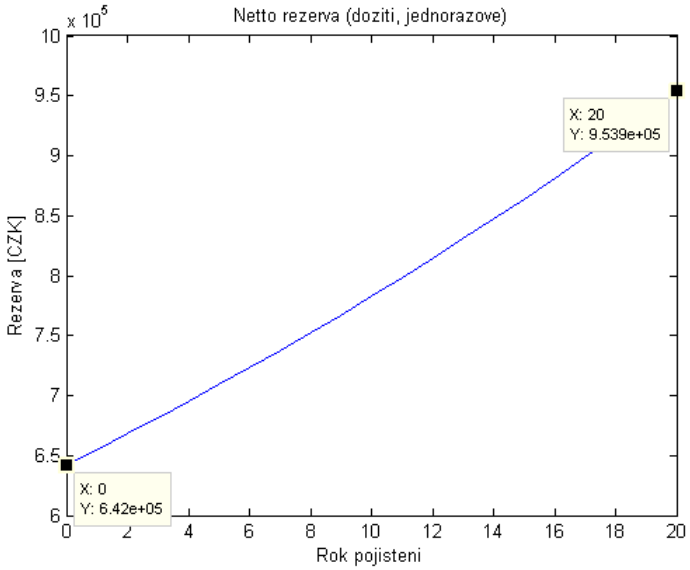
Pokud celé trvání pojištění rozdělíme v čase T (pochopitelně typicky v čase, ve kterém se zrovna nacházíme) dostaneme:

$$E(p._kl._do_T) + E(p._kl._od_T) = E(p._poj._do_T) + E(p._poj._od_T), \tag{1.34}$$

a tedy můžeme zavést označení rezervy

$$V \equiv E(p._kl._do_T) - E(p._poj._do_T) = E(p._poj._od_T) - E(p._kl._od_T). \tag{1.35}$$

Pokud použijeme rozdíl "do T", mluvíme o **retrospektivně počítané rezervě** a jedná se o hodnotu peněz, kterou by měla mít pojišťovna v čase T u sebe. v druhém případě je rezerva počítaná **prospektivně** a jde o peníze, které by měla pojišťovna mít připravené pro vyplácení plnění v další části pojištění. Pokud by bylo pojištění "stacionární", tedy v každém časovém úseku by pojišťovna dostala tolik, kolik musí dát klientovi, byla by pochopitelně rezerva nulová. To však většinou nenastává. Nejvýraznější rozdíl je u jednorázově placeného pojištění. Dále může rozdíl vznikat například v důsledku toho, že pojistné se platí stále stejně, ale pravděpodobnost úmrtí s časem roste.



Obrázek 1.6: Netto rezerva pro pojištění pro případ dožití placené jednorázově.

Příklad 1.5. Mějme jednorázově placené pojištění pro případ dožití. Víme, že zde platí rovnost:

$$P = E(platby_klienta)_0 = E(platby_poj.)_0 = K\,{}_np_x v^n = KE_{x,n}, \tag{1.36}$$

kde index 0 značí hodnoty vztažené k začátku pojištění. V libovolném okamžiku $t < n$ platí $E(platby_poj.)_t = 0$ a

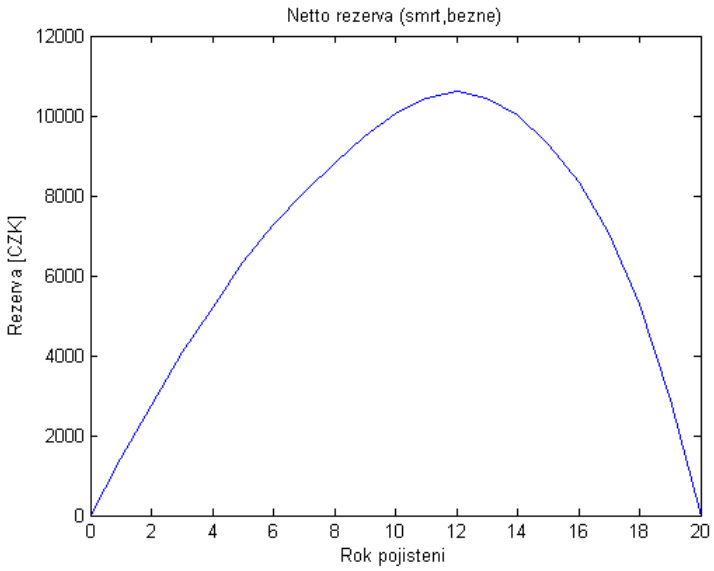
$$E(platby_klienta)_t = P(1+i)^t = KE_{x,n}\frac{1}{v^t} = K\,{}_np_x v^{n-t}. \tag{1.37}$$

Pokud za t dosadíme n, dostaneme $K\,{}_np_x$, což přesně odpovídá tomu, že je nyní potřeba s pravděpodobností ${}_np_x$ vyplatit částku K.

Mějme například hodnoty $K = 1000000$ Kč, $n = 20$, $x = 40$, $i = 2\%$. Potom z úmrtnostních tabulek dostaneme ${}_{20}p_{40} = 0,9539$, vypočítáme $P = 6.4197e5$ Kč a časový průběh hodnoty rezervy vidíme na Obr. 1.6.

Příklad 1.6. Nyní vezmeme pojištění pro případ smrti placené běžně. Víme, že zde platí rovnost:

$$P = K\frac{A^1_{x\bar{n}}}{\ddot{a}_{x,\bar{n}}}, \tag{1.38}$$



Obrázek 1.7: Netto rezerva pro pojištění pro případ smrti placené běžně.

V libovolném okamžiku $t < n$ platí

$$V_t = \frac{P\ddot{a}_{x,\bar{t}} - KA^1_{x\bar{t}}}{v^t}, \tag{1.39}$$

Kde je hodnota vztažena k okamžiku t.

Mějme například hodnoty $K = 1e6$ Kč, $n = 20$, $x = 40$, $i = 2\%$. Potom z úmrtnostních tabulek dostaneme $P = 2130$ Kč a časový průběh hodnoty rezervy vidíme na Obr. 1.7.

1.4 Brutto pojistné

Nyní již začneme brát v úvahu fakt, že pojišťovna má nějaké výdaje na svůj běh. Výdaje pojišťovny se dělí na:

- α - počáteční (sjednatel, doktor, formuláře, vývoj produktu ...)
- β - správní (nájem budovy, mzdy, reklama, likvidace smlouvy, ...)
- γ - inkasní (složenky, poplatky na účtech, ...)

Toto rozdělení je spíše historické, jelikož díky bezhotovostní internetové manipulaci s penězi může být například třetí skupina velmi zanedbatelná.

Pro určení **brutto pojistného** placeného běžně použijeme vztah:

$$B\ddot{a}_{x,\bar{n}} = P + \alpha K + \beta K\ddot{a}_{x,\bar{n}} + \gamma B\ddot{a}_{x,\bar{n}}, \tag{1.40}$$

a tedy

$$B = \frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{\alpha K}{\ddot{a}_{x,\bar{n}}} + \beta K + \frac{P}{\ddot{a}_{x,\bar{n}}}\right). \tag{1.41}$$

P je hodnota netto pojistného, dále ji budeme často značit N. Zde si můžeme všimnout, že výdaje pojišťovny jsou mezi klienty rozděleny poměrově v závislosti na výši jejich pojistky. Tento vzorec můžeme použít například pokud máme jen pojištění pro případ smrti.

Pro α se používá historicky zavedená hodnota $\alpha \simeq 3,5\%$. Dále $\beta \simeq 0,5\%$. Ohledně γ záleží na způsobu placení pojistného. Pro pojišťovnu je výhodné, aby klient zaplatil pojistné na celý rok dopředu. V takovém případě dostává klient výhodu. Ještě jsou zde dva přístupy, které se však liší jen "kosmeticky". Většinou bývá $\gamma \simeq 7\% - 10\%$ a za placení celoročně je sleva 5%, nebo je $\gamma \simeq 2\%$ a za placení měsíčně je přirážka 5%, takže to vyjde nastejno.

1.4.1 Brutto rezervy

Příklad 1.7. Mějme běžně placené pojištění pro případ dožití. Nejprve si spočteme netto pojistné:

$$N = K\frac{E_{x\bar{n}}}{\ddot{a}_{x,\bar{n}}}. \tag{1.42}$$

Nyní můžeme vyjádřit brutto pojistné jako:

$$B = \frac{K}{1-\gamma}\left(\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x,\bar{n}}} + \beta + \frac{N}{K}\right). \tag{1.43}$$

Pokud budeme uvažovat variantu, kdy klient platí inkasní náklady γ měsíčně, pak γ i β můžeme z výpočtu rezervy úplně vypustit, protože je prostě každý měsíc klient zaplatí a pojišťovna rovnou použije. Dostáváme tedy nový vztah pro brutto pojistné:

$$\tilde{B} = K\left(\frac{\alpha}{\ddot{a}_{x,\bar{n}}} + \frac{N}{K}\right). \tag{1.44}$$

Zde však již $\tilde{B}$ neodpovídá částce, kterou klient měsíčně platí, ale je to jen jistá pomocná hodnota pro výpočet rezervy. Skutečnému pojistnému by odpovídala, pokud by byly správní i inkasní náklady pojišťovny nulové.

Na Obr. 1.8(a) je klasický příklad pro hodnoty $K = 1e6$ Kč, $n = 20$, $x = 40$, $i = 2\%$ a $\alpha = 3.5\%$. Kvůli zvýraznění počáteční platby a exponenciálního zhodnocování peněz (a větší analogii k obrázku z přednášky) je na Obr. 1.8(b) ještě uveden stejný příklad pro $i = 15\%$ a $\alpha = 15\%$.

1.5 Další střípky

1.5.1 Změny smlouvy

Pojistnou smlouvu může klient i v průběhu změnit, případně zrušit. V ČR je přibližně zrušeno 8% smluv ročně (v prvních letech dané smlouvy i 20%). Zde je několik nejčastějších druhů změny smlouvy (je uveden důvod změny a v závorce následek):

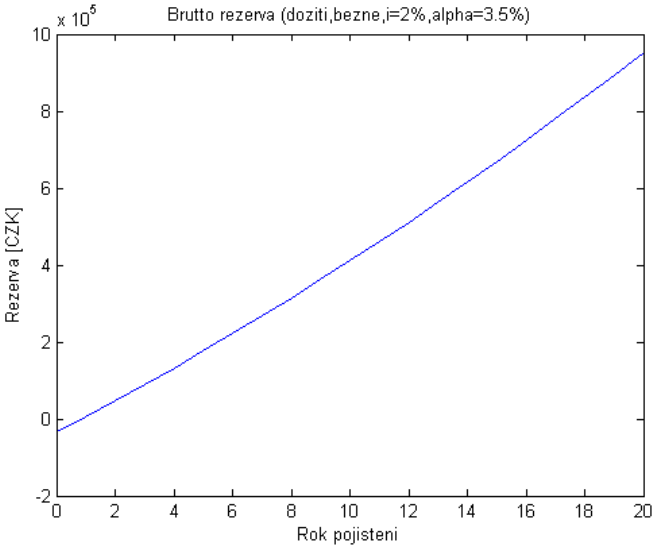
- konec pojištění a vyrovnání (pojišťovna klientovi něco vrátí)
- konec placení pojistného (redukce pojistné částky, nebo hlavně u pojištění pro případ smrti, redukce pojistné doby)
- změna parametrů smlouvy
  - pojistné částky (a pojistného)
  - pojistné doby (a pojistného)
  - pojistného (a pojistné částky)
  - a libovolné jiné kombinace....

Při změně pojištění se postupuje tak, že se standardně určí nová výše pojistného (nebo jiného parametru), ale navíc se započítá rezerva v okamžiku změny jako jednorázová platba pojistného. (Ve vzácných případech, kdy by byla rezerva v okamžiku změny záporná, se nepřipočte ani neodečte nic.)

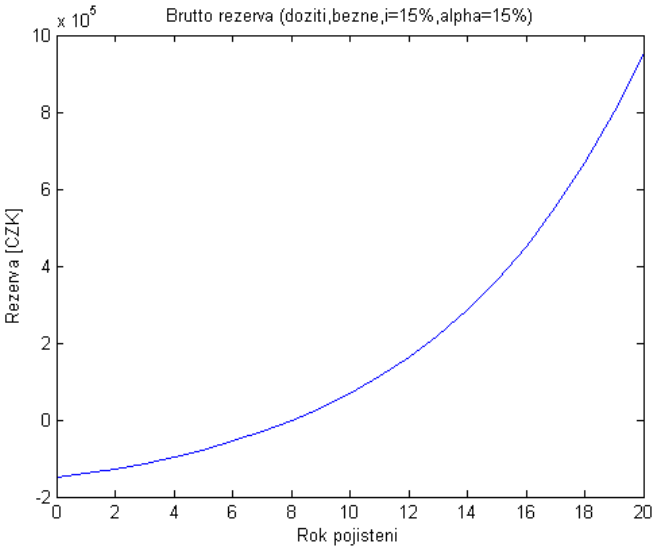
1.5.2 Zajištění

Nad pojišťovnami jsou ještě organizace zvané zajišťovny (cca 100 významných na světě), jejichž hlavním úkolem je pokrytí zásadních (nečekaných) událostí, které by mohly ohrozit chod jednotlivé pojišťovny. Máte totiž k dispozici jen údaje o pravděpodobnosti úmrtí lidí obecně a ne pro jednotlivce. Pokud se stane, že více zemřelých v jednom roce jsou právě ti s velmi vysokými pojistkami, může se pojišťovna dostat do problémů. I zajišťovny si riziko vzájemně distribuují, čímž se zmenšuje možnost zásadních problémů "jednotlivců".

Zajišťovna v principu funguje tak, že přebírá část rizika pojišťovny. Tedy bere si část pojistného od klientů a pokrývá část plnění místo pojišťovny. Jsou dva hlavní modely: proporční a neproporční.

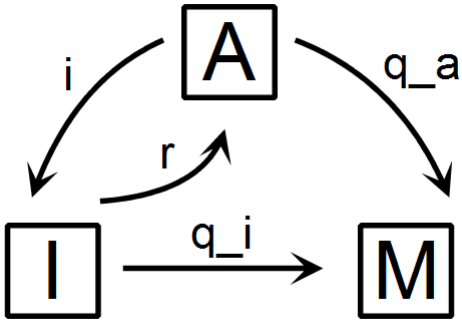


(a) $i = 2\%$, $\alpha = 3.5\%$



(b) $i = 15\%$, $\alpha = 15\%$

Obrázek 1.8: Brutto rezerva pro pojištění pro případ dožití placené běžně s parametry $K = 1e6$ Kč, $n = 20$, $x = 40$.



Obrázek 1.9: Troj-stavový model.

V proporčním modelu zajišťovna přebírá $X\%$ z každé smlouvy. To však v podstatě znamená, že pojišťovna jen odevzdává (částečně) své klienty zajišťovně. Proto je tato varianta volena spíše například jako ústupek zajišťovně za poskytnutí jiné služby výhodné pro pojišťovnu. Jsou zde dvě možnosti, jak určit X.

- QS (kvóta) - z každé smlouvy se bere stejné procento.
- surplus (excedent) - je stanovena částka - třeba 200 000 Kč a vše nad tuto částku přebírá zajišťovna. (Třeba smlouvu na 100k si pojišťovna nechá celou, ale ze smlouvy na 500k si nechá jen 40%.)

Neproporční zajištění může mít mnoho podob. Například se spočte průměrná výše plnění, kterou by měla pojišťovna v budoucnu platit a co je v reálu nad tuto částku zaplatí zajišťovna ("škodní nadměrek"). Pokud je plnění nižší, pojišťovna na tom vydělá, takže takováto smlouva by pro ni byla extrémně výhodná. Jiné varianty jsou, že zajišťovna zaplatí dvě nejvyšší pojistné částky z daného roku, zaplatí první plnění, o které si pojišťovna řekne, a tak podobně.

Podle zákona však musí celé krytí dělat pojišťovna. Klient tedy vymáhá své peníze u pojišťovny a ta ho nemůže odkázat na zajišťovnu. Nicméně až 50% tohoto krytí může být ve formě pohledávky u zajistitele.

1.5.3 Troj-stavový model

V této přednášce se zabýváme jen nejjednodušším modelem, kde je člověk živý, nebo mrtvý. Komplexnější model může zahrnovat možnost invalidních lidí. Potom rozlišujeme stavy **aktivní**, **invalidní** a **mrtvý**. Situace je znázorněna na Obr. 1.9. Může zde docházet k úmrtím aktivních i invalidních lidí, invaliditě aktivních a případně reaktivaci invalidních na aktivní.

1.5.4 Úprava neceloročních výrazů

Budeme upravovat výraz ${}_{\frac{n}{12}}p_x \cdot {}_{\frac{1}{12}}q_{x+\frac{n}{12}}$, tedy pravděpodobnost, že člověk, který na začátku roku x žije, zemře právě v n-tém měsíci. Využijeme zde vztah

$$ {}_uq_x = uq_x, \tag{1.45} $$

který se uvažuje pro $u \in (0,1)$. Jedná se o určitou aproximaci, která je příčinou do jisté míry překvapivého výsledku.

$$ {}_{\frac{n}{12}}p_x \cdot {}_{\frac{1}{12}}q_{x+\frac{n}{12}} = (1 - {}_{\frac{n}{12}}q_x)(1 - {}_{\frac{1}{12}}p_{x+\frac{n}{12}}) = \otimes. \tag{1.46} $$

Dále použijeme vzorec ${}_np_x \cdot {}_mp_{x+n} = {}_{m+n}p_x$ a dostáváme:

$$ \otimes = (1 - {}_{\frac{n}{12}}q_x)\left(1 - \frac{{}_{\frac{n+1}{12}}p_x}{{}_{\frac{n}{12}}p_x}\right) = 1 - {}_{\frac{n}{12}}q_x - {}_{\frac{n+1}{12}}p_x = \tag{1.47} $$

$$ = 1 - {}_{\frac{n}{12}}q_x - (1 - {}_{\frac{n+1}{12}}q_x) = -\frac{n}{12}q_x + \frac{n+1}{12}q_x = \frac{1}{12}q_x, \tag{1.48} $$

tedy pravděpodobnost úmrtí je v každém měsíci daného roku stejná.

1.5.5 Komutační čísla

Komutační čísla jsou hodnoty určitých výrazů, které jsou tabelovány a je možné z nich skládat výše používané výrazy. Dříve bez použití počítačů byl jejich význam zásadní, ale i dnes umožňují zjednodušit skripty počítačových simulací a zrychlit výpočet. Konkrétně jsou definována jako:

$C_x = d_x v^{x+1}$	$D_x = l_x v^x$
$M_x = \sum_{k=0}^{\infty} C_{x+k}$	$N_x = \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}$
$R_x = \sum_{k=0}^{\infty} M_{x+k}$	$S_x = \sum_{k=0}^{\infty} N_{x+k}$

Nyní můžeme například psát:

$$ \ddot{a}_{x,\bar{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_x v^k = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}, \tag{1.49} $$

$$ A^1_{x\bar{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_x q_{x+k} v^{k+1} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}, \tag{1.50} $$

$$E_{x\bar{n}} = \frac{D_{x+n}}{D_x}. \tag{1.51}$$