1. Kompaktní operátory

V této kapitole po uvedení potřebných definic formulujeme Arzelovu–Ascoliovu větu a nakonec uvedeme důležitá tvrzení o kompaktních operátorech z FA3.

Definice 1. Buď X metrický prostor. Množina K je totálně omezená, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε-síť $x_1, \dots, x_n \in X$, tj. taková množina, že $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \varepsilon)$.

Poznámka. Snadno vidíme, že totální omezenost je skutečně zesílení pojmu omezenosti (tj. totální omezenost implikuje omezenost).

Definice 2. Množina K je prekompaktní, právě když je $\overline{K}$ kompaktní.

Následující tvrzení se na FA2 nedokazuje; v podstatě jde o opakování z MAA3.

Tvrzení 3. *(1) Buď X úplný metrický prostor. Pak $K \subset X$ je kompaktní, právě když je uzavřená a totálně omezená. Ekvivalentně $K \subset X$ je prekompaktní, právě když je totálně omezená.*

(2) Buď X jakýkoliv metrický prostor. Pak $K \subset X$ je kompaktní, právě když každá posloupnost prvků z K má konvergentní podposloupnost.

Tvrzení 4. *Kompaktní metrický prostor (K, ϱ) je separabilní.*

Důkaz. Ukážeme nejprve, že kompaktní metrický prostor je úplný. Nechť $x_k \in K$ je cauchyovská posloupnost. Z kompaktnosti K pak plyne, že má alespoň jeden hromadný bod, z cauchyovskosti naopak plyne, že je nejvýše jeden.

Uvedli jsme, že kompaktní množina v úplném prostoru je totálně omezená. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy existuje $N \in \mathbb{N}$ bodů $S_n = \{x_{n1}, \dots, x_{nN}\}$ tak, že $K \subset \bigcup_{k=1}^{N} B(x_{nk}, 1/n)$. Snadno pak ukážeme, že spočetná množina $S := \bigcup_{n=1}^{N} S_n$ je hustá. Pro $y \in K$ a $\varepsilon > 0$ stačí volit $n > 1/\varepsilon$, abychom našli $x \in S_n \subset S$ tak, že $y \in B(x, 1/n) \subset B(x, \varepsilon)$.

Alternativní důkaz: Totální omezenost K lze dokázat bez berličky v podobě úplnosti a odvolání se na známé tvrzení. Pro zadané ε uvážíme množinu všech koulí o poloměru ε se středy kdekoliv v K. Jde o systém otevřených pokrývajících množin, takže existuje konečný pokrývající podsystém. Středy příslušných koulí tvoří požadovanou ε-síť. □

Tvrzení 5. *Nechť (Ω, ϱ) je kompaktní metrický prostor. Pak normovaný prostor spojitých funkcí $(\mathcal{C}(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ je úplný.*

Důkaz. Na přednášce se nedělá, nicméně patrně půjde pouze o zobecnění vět o funkčních posloupnostech probíraných na začátku MAA3 (BC kriterium a věta o zachování spojitosti při stejnoměrné konvergenci). □

Definice 6. Množina $S \subset \mathcal{C}(X)$ je tvořena stejně spojitými funkcemi, právě když

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall f \in S)(\forall x, y \in X)(\varrho(x, y) < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Věta 7 (Arzelà–Ascoli)**.** *Nechť (Ω, ϱ) je kompaktní metrický prostor a $S \subset \mathcal{C}(\Omega)$. S je kompaktní, právě když je omezená, uzavřená a je tvořena stejně spojitými funkcemi.*

Důkaz. ($\Rightarrow$): Protože S jakožto podmnožina úplného metrického prostoru $\mathcal{C}(\Omega)$ je uzavřená a dokonce totálně omezená, stačí ověřit jen to, že S je tvořena stejně spojitými funkcemi.

Chceme tedy odhadnout výraz $|f(x) - f(y)|$ nezávisle na konkrétní volbě $f \in S$ a $x, y \in \Omega$, pouze za předpokladu, že vzdálenost $\varrho(x, y) < \delta$. Víme, že S je totálně omezená množina, tedy pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečný počet ε-okolí pokrývajících normovaný prostor $\mathcal{C}(\Omega)$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists g_1, \dots, g_n \in S)(\forall f \in S)(\exists j \in \{1, \dots, n\})(\forall x \in \Omega)(|f(x) - g_j(x)| < \varepsilon)$$

Nabízí se tedy možnost aproximovat danou funkci $f \in S$ některou z funkcí g_j. Pro dané $\varepsilon > 0$ tedy najdeme ε-síť $g_1, \dots, g_n$ a pro danou $f \in S$ najdeme to pravé j tak, že $|f(x) - g_j(x)| < \varepsilon$ nezávisle na volbě x. Nyní již stačí využít odhadu

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - g_j(x)| + |g_j(x) - g_j(y)| + |g_j(y) - f(y)|$$

Oba krajní členy budou menší než ε nezávisle na $f \in S$ i na $x, y \in \Omega$. Prostřední člen lze zajisté rovněž odhadnout díky spojitosti funkcí $g_j \in S$, ovšem je třeba ukázat, že daný odhad rovněž nezávisí na volbě j, x a y. Jinými slovy potřebujeme vědět, že konečný systém $g_1, \ldots, g_n$ je stejně spojitý. To však skutečně splněno je. Díky tomu, že Ω je kompaktní množina, jsou z Cantorovy věty funkce $g_j \in \mathcal{C}(\Omega)$ spojité stejnoměrně. Díky tomu, že je daných funkcí konečně mnoho, jsou spojité stejně. Skutečně, stejnoměrná spojitost znamená

$$(\forall j)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_j > 0)(\forall x, y \in \Omega)(\varrho(x, y) < \delta_j \implies |g_j(x) - g_j(y)| < \varepsilon.$$

Zvolíme-li pro dané $\varepsilon > 0$ $\delta := \min \delta_j$, bude splněno

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall j)(\forall x, y \in \Omega)(\varrho(x, y) < \delta \implies |g_j(x) - g_j(y)| < \varepsilon.$$

I prostřední člen tedy můžeme odhadnout nezávisle na bodech $x, y \in \Omega$ a na tom, ve kterém z pokrývajících okolí se funkce $f \in S$ nacházela.

($\Leftarrow$): Chceme ukázat, ze S je kompaktní množina. V metrickém prostoru kompaktnost znamená, že ke každé posloupnosti existuje konvergentní podposloupnost. Nechť je tedy $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ libovolná posloupnost z S, budeme hledat její konvergentní podposloupnost.

Tvrzení 4 říká, že Ω je separabilní. Existuje tedy spočetná hustá množina $\{x_k\}_{k=0}^{+\infty} \subset \Omega$. V následujícím textu sestrojíme posloupnost (g_n) vybranou z (f_n), která bude konvergentní v každém bodě této husté podmnožiny. Nakonec pak ukážeme, že to implikuje konvergenci samotné (g_n).

Snadno rozmyslíme, že omezenost množiny S, a tedy i posloupnosti (f_n) znamená, že je i pro každý bod $x \in \Omega$ číselná posloupnost $(f_n(x))$ omezená. Z MAA1 víme, že z omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost. Při výběru (g_n) tedy můžeme postupovat následujícím způsobem.

Z číselné posloupnosti $(f_n(x_1))_{n=1}^{\infty}$ vybereme konvergentní posloupnost $(f_n^{(1)}(x_1))_{n=1}^{\infty}$. Získáme tak funkční posloupnost $(f_n^{(1)})$, která je vybraná z (f_n) a konverguje v x_1. Podobně z posloupnosti $(f_n^{(1)})_{n=1}^{\infty}$ vybereme podposloupnost $(f_n^{(2)})_{n=1}^{\infty}$, která konverguje i v bodě x_2. Obecně lze z posloupnosti $(f_n^{(k)})_{n=1}^{\infty}$, která konverguje v bodech $x_1, \ldots, x_k$, vybrat podposloupnost $(f_n^{(k+1)})_{n=1}^{\infty}$, která konverguje i v bodě x_{k+1}.

Pro výběr posloupnosti (g_n) nakonec použijeme tzv. diagonální schéma – definujeme ji jako $g_n := f_n^{(n)}$. Tato posloupnost jistě konverguje v každém bodě x_k, neboť tvoří pro každé k až na prvních k členů vybranou posloupnost z $(f_n^{(k)})$, která v x_k konverguje.

Víme tedy, že funkční posloupnost (g_n) konverguje ve všech bodech husté množiny $\{x_k\}$. Zbývá ukázat, že konverguje jakožto funkční posloupnost v prostoru S (tj. že konverguje stejnoměrně na celém Ω a limitní funkce leží v S). Protože S jakožto uzavřená podmnožina úplného prostoru $\mathcal{C}(\Omega)$ tvoří úplný prostor, stačí ukázat, že je posloupnost (g_n) cauchyovská. Budeme se tedy snažit odhadnout výraz $|g_n(x) - g_m(x)|$ nezávisle na volbě $x \in \Omega$. Nabízí se využít odhad

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leq |g_n(x) - g_n(x_k)| + |g_n(x_k) - g_m(x_k)| + |g_m(x_k) - g_m(x)|$$

Krajní členy odhadneme snadno – bod x_k lze díky hustotě $\{x_k\}$ vybrat libovolně blízko danému x (tj. pro každé δ existuje k tak, že $\varrho(x, x_k) < \delta$). Díky tomu, že jsou funkce g_n stejně spojité, lze tyto členy volit menší než libovolné ε nezávisle na volbě n či x. Prostřední člen bychom chtěli odhadnout s využitím toho, že (g_n) konverguje v každém bodě x_k (a je tedy zde cauchyovská). Nevíme ovšem, zda v každém z těchto bodů konverguje stejně. Náš odhad by tedy závisel na daném x_k, a tím i na x. Řešení je následující: pro každé dané ε stačí vybrat z husté množiny $\{x_k\}$ konečnou δ-síť. V bodech δ-sítě pak díky její konečnosti konverguje posloupnost (g_n) stejně.

Nadšený čtenář jistě důkaz dokončí sám, pro ostatní ho školometsky rozepíšeme. Pro dané $\varepsilon > 0$ hledáme n_0 tak, že pro každé $n, m > n_0$ a každé $x \in \Omega$ je $|g_n(x) - g_m(x)| < \varepsilon$. Víme, že posloupnost (g_n) tvoří stejně spojité funkce, tj. existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x, y \in \Omega$ je $|g_n(x) - g_n(y)| < \varepsilon/3$. Vezmeme dané δ a z množiny

$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ vybereme konečnou δ síť $\{\tilde{x}_k\}_{k=0}^{N}$. Díky hustotě $\{x_k\}$ totiž systém $\{B(x_k,\delta)\}$ pokrývá Ω a díky kompaktnosti z něj lze vybrat konečné podpokrytí, které bude tvořit hledanou konečnou δ-síť[1]. Posloupnost (g_n) konverguje ve všech bodech $\tilde{x}_k$, tj. pro každé $k \in \{0,\dots,N\}$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje n_k tak, že pro každé $n, m > n_k$ je $|g_n(\tilde{x}_k) - g_m(\tilde{x}_k)| < \varepsilon/3$. Nyní stačí volit $n_0 := \max_{0\le k\le N} n_k$. Našli jsme totiž pro každé $\varepsilon > 0$ číslo n_0 a body $\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_N$ takové, že pro libovolné $x \in \Omega$ najdeme $\tilde{x}_k$ tak, že $\varrho(x,\tilde{x}_k) < \delta$, a tedy pro libovolné $n > n_0$ je $|g_n(x) - g_n(\tilde{x}_k)| < \varepsilon/3$. Dále je pro libovolné $n, m > n_0$ a libovolné $k \in \{0,\dots,N\}$ i $|g_n(\tilde{x}_k) - g_m(\tilde{x}_k)| < \varepsilon/3$. S využitím odhadu výše je tvrzení dokázáno. □

Definice 8. Buďte $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ Banachovy prostory. Omezený operátor $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ nazveme kompaktní, je-li obraz každé omezené množiny prekompaktní.

Věta 9. *Buď $\mathcal{H}$ Hilbertův prostor, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Pak A je kompaktní, právě když A zobrazuje každou slabě konvergentní posloupnost na silně konvergentní.*

Věta 10. *Kompaktní operátory v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tvoří uzavřený podprostor, který je uzávěrem podprostoru všech konečněrozměrných operátorů (tj. $\dim \operatorname{Ran} < +\infty$) a představuje dvoustranný $*$-ideál (tj. pro $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, A kompaktní jsou i AB, BA a A^* kompaktní).*

Věta 11. *Nechť $\mathcal{X}$ je nekonečněrozměrný Banachův prostor, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ kompaktní. Pak*

(1) $0 \in \sigma(A)$*;*
(2) $\sigma(A) \setminus \{0\} \subset \sigma_p(A)$*;*
(3) pro nenulové vlastní hodnoty λ je dimenze vlastního podprostoru $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ *konečná;*
(4) $\sigma(A) \setminus \{0\}$ *nemá nenulový hromadný bod (tj. pro $\varepsilon > 0$ je $(\mathbb{C} \setminus B_\varepsilon) \cap \sigma(A)$ konečná).*

Důkaz. Na přednášce se neuvádí, lze ho nalézt například v Modré smrti na straně 181. Vysvětleme pouze ekvivalenci z bodu (4): Spektrum celé leží v uzavřené kouli o poloměru $\|B\|$. To je kompaktní množina, takže pokud je spektrum nekonečná množina, musí mít hromadný bod. Stejně tak je kompaktní i tatáž koule, když z ní vyjmeme otevřenou kouli B_ε. Kdyby v ní leželo nekonečně mnoho bodů spektra, existovala by tedy nenulová hromadná hodnota. □

Věta 12 (Hilbert–Schmidt)**.** *Je-li $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ kompaktní a $A = A^*$, pak A má čistě bodové spektrum. (Tzn. existuje ON báze z vlastních vektorů A.)*

Poznámka. Buď (f_n) ortonormální báze z vlastních vektorů $A = A^*$, tj. $Af_n = \lambda_n f_n$. Pak lze psát $Ax = \sum_n \langle f_n, Ax\rangle f_n = \sum_n \langle Af_n, x\rangle f_n = \sum_n \lambda_n \langle f_n, x\rangle f_n$.

Poznámka. Modrá smrt na straně 182 uvádí Hilbert–Schmidtovu větu s předpokladem, že A je normální. Pro hermitovské operátory ale věta samozřejmě platí tím spíš.

[1] Tvrzení je však jasné už jenom z toho jak jsme v důkazu tvrzení 4 hustou množinu konstruovali – bylo to právě sjednocení konečných ε-sítí pro menší a menší ε.