## 1. Neomezené operátory

Obecně $\mathrm{Dom}\, A \neq \mathcal{H}$, obvykle požadujeme $\overline{\mathrm{Dom}\, A} = \mathcal{H}$.

(1) $A = B \iff \mathrm{Dom}\, A = \mathrm{Dom}\, B \wedge Ax = Bx\ \forall x \in \mathrm{Dom}\, A$,
(2) $C = AB$: $\mathrm{Dom}\, C = \{x \in \mathrm{Dom}\, B | Bx \in \mathrm{Dom}\, A\}$, $Cx = ABx\ \forall x \in \mathrm{Dom}\, C$,
(3) $C = A + B$: $\mathrm{Dom}\, C = \mathrm{Dom}\, A \cap \mathrm{Dom}\, B$.

**Definice 1.** Nechť $\overline{\mathrm{Dom}\, A} = \mathcal{H}$. Potom $x \in \mathrm{Dom}\, A^*$, právě když existuje $u \in \mathcal{H}$ tak, že pro každé $y \in \mathrm{Dom}\, A$ je $(x, Ay) = (u, y)$. Jestliže $u \in \mathcal{H}$ existuje, pak je určeno jednoznačně: Kdyby existovalo $u' \in \mathcal{H}$ tak, že pro každé $y \in \mathrm{Dom}\, A$ $(x, Ay) = (u', y)$, pak pro každé $y \in \mathrm{Dom}\, A$ je $(u - u', y) = 0$ a $u - u' \in \mathrm{Dom}\, A^\perp = (\overline{\mathrm{Dom}\, A})^\perp = \{0\}$. Pokládáme $A^* x = u$.

**Tvrzení 2.** *Platí:*

*(i)* $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$ *$(\lambda \neq 0)$;*
*(ii)* $(A+B)^* \supset A^* + B^*$*, pokud je levá strana definovaná (*$\overline{\mathrm{Dom}(A+B)} = \overline{\mathrm{Dom}\, A \cap \mathrm{Dom}\, B} = \mathcal{H}$*);*
*(iii)* $(AB)^* \supset B^* A^*$*, pokud je levá strana definovaná (*$\mathrm{Dom}\, AB = \mathcal{H}$*);*
*(iv)* $A \subset B \implies B^* \subset A^*$.

*Důkaz.* (1) Buď $x \in \mathrm{Dom}\, A^* = \mathrm{Dom}(\lambda A^*)$ (platí pro $\lambda \neq 0$). Pro $y \in \mathrm{Dom}(\lambda A)$ platí

$$(x, (\lambda A)y) = (x, \lambda(Ay)) = \lambda(x, Ay) = \lambda(A^* x, y) = (\overline{\lambda} A^* x, y),$$

z čehož plyne $x \in \mathrm{Dom}(\lambda A)^*$, díky jednoznačnosti $\overline{\lambda} A^* x = (\lambda A)^* x$ a $\overline{\lambda} A^* \subset (\lambda A)^*$.

Naopak buď $x \in \mathrm{Dom}(\lambda A)^*$, pak

$$(\overline{\lambda} x, Ay) = (x, \lambda A y) = ((\lambda A)^* x, y).$$

Proto $x \in \mathrm{Dom}(\overline{\lambda} A^*)$ a $(\lambda A)^* \subset \overline{\lambda} A^*$. Celkem $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$.

(2) Buď $x \in \mathrm{Dom}(A^* + B^*)$, tedy $x \in \mathrm{Dom}\, A^* \cap \mathrm{Dom}\, B^*$, $y \in \mathrm{Dom}(A + B)$. Pak

$$(x, (A + B)y) = (x, Ay) + (x, By) = (A^* x, y) + (B^* x, y) = ((A^* + B^*)x, y).$$

(3) Buď $x \in \mathrm{Dom}(B^* A^*) \iff x \in \mathrm{Dom}\, B^* \wedge A^* x \in \mathrm{Dom}\, B^*$. Pro každé $y \in \mathrm{Dom}(AB)$, tj. $y \in \mathrm{Dom}\, B$, $By \in \mathrm{Dom}\, A$ platí

$$(x, (AB)y) = (x, A(By)) = (A^* x, By) = (B^*(A^* x), y) = (B^* A^* x, y).$$

Proto $x \in \mathrm{Dom}(AB)^*$, $(AB)^* x = (B^* A^*)x$ a $B^* A^* \subset (AB)^*$.

(4) Buď $x \in \mathrm{Dom}\, B^*$. Pro $y \in \mathrm{Dom}(A) \subset \mathrm{Dom}(B)$ platí

$$(x, Ay) = (x, By) = (B^* x, y)$$

a $x \in \mathrm{Dom}\, A^*$, $A^* x = B^* x \implies B^* \subset A^*$. □

**Věta 3.** *Nechť* $\overline{\mathrm{Dom}\, A} = \mathcal{H}$*,* $A^{-1}$ *existuje (*$\mathrm{Ker}\, A = 0$*) a* $\overline{\mathrm{Dom}\, A^{-1}} = \mathcal{H}$ *(*$\mathrm{Dom}\, A^{-1} = \mathrm{Ran}\, A$*). Potom* $(A^*)^{-1}$ *existuje a platí* $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

*Důkaz.* (1) Buď $x \in \mathrm{Ker}\, A^*$. Potom pro každé $y \in \mathrm{Dom}\, A$ je $(x, Ay) = (0, y) = 0$. Protože $Ay \subset \mathrm{Ran}\, A = \mathrm{Dom}\, A^{-1}$, který je hustý, je $x = 0$, tj. $\mathrm{Ker}\, A^* = \{0\}$ a tedy $(A^*)^{-1}$ existuje.

(2) Buď $y \in \mathrm{Dom}(A^{-1}) = \mathrm{Ran}\, A$, $y = Au$, $u \in \mathrm{Dom}\, A$, $(x, A^{-1} y) = (x, u)$.

Pro každé $u \in \mathrm{Dom}\, A$, $x \in \mathrm{Dom}(A^*)^{-1}$ je

$$(x, A^{-1} A u) = (x, u) = (A^*(A^*)^{-1} x, u) = ((A^*)^{-1} x, Au).$$

Pro $y \in \mathrm{Dom}(A^{-1})$, $x \in \mathrm{Dom}(A^*)^{-1}$ je $(x, A^{-1} y) = ((A^*)^{-1} x, y)$, tudíž $x \in \mathrm{Dom}(A^{-1})^*$ a $(A^{-1})^* x = (A^*)^{-1} x$.

(3) Buď $y \in \mathrm{Dom}(A^{-1})^*$, $x \in \mathrm{Dom}\, A^{-1}$. Potom

$$((A^{-1})^* y, A A^{-1} x) = ((A^{-1})^* y, x) = (y, A^{-1} x).$$

Pro $y \in \mathrm{Dom}(A^{-1})^*$, $z \in \mathrm{Dom}\, A$ je $((A^{-1})^* y, Az) = (y, z)$. Proto $(A^{-1})^* y \in \mathrm{Dom}\, A^*$, $A^*(A^{-1})^* y = y \in \mathrm{Ran}\, A^* = \mathrm{Dom}(A^*)^{-1}$, $(A^*)^{-1} y = (A^{-1})^* y$ a $(A^{-1})^* \subset (A^*)^{-1}$. Celkem $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$. □

*Poznámka.* (1) $A = \overline{A} \implies \overline{\mathrm{Ker}\, A} = \mathrm{Ker}\, A$.

(2) Je-li $\overline{\mathrm{Dom}\, A} = \mathcal{H}$, potom $\mathrm{Ran}(A-\lambda I)^\perp = \mathrm{Ker}(A^* - \overline{\lambda} I)$.

*Důkaz.* $x \in \mathrm{Ran}(A-\lambda I)^\perp \iff (x,(A-\lambda I)y) = 0\ \forall y \in \mathrm{Dom}\, A \iff x \in \mathrm{Ker}(A^* - \overline{\lambda} I)$. □

(3) Jestliže $\overline{\mathrm{Dom}\, A} = \mathcal{H}$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, pak $(A+B)^* = A^* + B^*$ a $\mathrm{Dom}(A+B) = \mathrm{Dom}(A)$. Specielně $(A-\lambda I)^* = A^* - \overline{\lambda} I$.

(4) Je-li $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, pak $A^{**} = A$. Je-li $A$ neomezený, potom $A^{**}$ existuje, právě když $\overline{\mathrm{Dom}\, A^*} = \mathcal{H}$; potom $A^{**} = \overline{A}$.

(5) $\Gamma(\overline{A}) = \overline{\Gamma(A)}$, $\Gamma(A) \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Definujeme $([x,y],[x',y']) = (x,x') + (y,y')$, $\|[x,y]\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$. Označme $U : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} : [x,y] \mapsto [y,-x]$. Zřejmě $U^2 = -I$, $U^* = U^{-1} = -U$.

(6) Buď $M \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Pak $U(M)^\perp = U(M^\perp)$:

$$\begin{aligned}
[x,y] \in U(M)^\perp &\iff \forall [u,v] \in U(\Gamma) : ([x,y],[u,v]) = 0 \\
&\iff \forall [u,v] \in \Gamma : ([x,y],[v,-u]) = 0 \\
&\iff (x,v) - (y,u) = 0, \\
[x,y] \in U(M^\perp) &\iff [-y,x] \in \Gamma^\perp \\
&\iff \forall [u,v] \in M([-y,x],[u,v]) = 0 \\
&\iff -(y,u) + (x,v) = 0.
\end{aligned}$$

**Lemma 4.** *Nechť* $\overline{\mathrm{Dom}\, A} = \mathcal{H}$. *Potom* $\Gamma(A^*) = U(\Gamma(A))^\perp$.

*Důkaz.*

$$\begin{aligned}
[x,y] \in \Gamma(A^*) &\iff \forall u \in \mathrm{Dom}\, A : (x,Au) = (y,u) \\
&\iff \forall [u,Au] \in \Gamma(A) : ([x,y], \underbrace{[Au,-u]}_{U[u,Au]}) = 0 \\
&\iff \forall [u,v] \in \Gamma(A) : ([x,y], U[u,v]) = 0 \\
&\iff [x,y] \in U(\Gamma(A))^\perp. \quad \square
\end{aligned}$$

**Důsledek.** $A^*$ *je uzavřený, neboť* $\Gamma(A^*) = \overline{\Gamma(A^*)}$.

**Věta 5.** *Nechť* $\overline{\mathrm{Dom}\, A} = \mathcal{H}$. *Potom* $A^{**} = (A^*)^*$ *existuje, právě když* $A$ *je uzavíratelný a navíc* $A^{**} = \overline{A}$.

*Důkaz.* $A^{**}$ existuje $\iff \overline{\mathrm{Dom}\, A^*} = \mathcal{H} \iff \mathrm{Dom}(A^*)^\perp = \{0\}$. Dále

$$\begin{aligned}
[x,0] \in \Gamma(A^*)^\perp &\iff \forall [u,v] \in \Gamma(A^*) : 0 = ([x,0],[u,v]) = (x,u) \\
&\iff x \in \mathrm{Dom}(A^*)^\perp
\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}
x \in \mathrm{Dom}(A^*)^\perp &\iff [x,0] \in \Gamma(A^*)^\perp = U(\Gamma(A))^{\perp\perp} = \overline{U(\Gamma(A))} = U(\overline{\Gamma(A)}) \\
&\iff -U[x,0] \in \overline{\Gamma(A)} \\
&\iff [0,x] \in \overline{\Gamma(A)}.
\end{aligned}$$

Z toho plyne

$$\begin{aligned}
\exists A^{**} &\iff \overline{\mathrm{Dom}\, A^*} = \mathcal{H} \iff \mathrm{Dom}(A^*)^\perp = \{0\} \\
&\iff \{x \in \mathcal{H} | [0,x] \in \overline{\Gamma(A)}\} = \{0\} \\
&\iff \overline{\Gamma(A)} \text{ je graf} \\
&\iff A \text{ je uzavíratelný.}
\end{aligned}$$

Konečně

$$\Gamma(A^{**}) = U(\Gamma(A^*))^\perp = U(\Gamma(A^*)^\perp) = U(\overline{U(\Gamma(A))}) = U^2(\overline{\Gamma(A)}) = \overline{\Gamma(A)} = \Gamma(\overline{A}).$$

Přitom jsme využili toho, že $\overline{\Gamma(A)}$ je podprostor, takže $(-1)\overline{\Gamma(A)} = \overline{\Gamma(A)}$. □

**Definice 6.** Nechť $A$ je hustě definovaný. Potom

(1) $A$ je symetrický, právě když (ekvivalentní formulace)
   (a) $(\forall x, y \in \operatorname{Dom} A)((Ax, y) = (x, Ay))$,
   (b) $(\forall x \in \operatorname{Dom} A)(x \in \operatorname{Dom} A^*,\ A^*x = Ax)$,
   (c) $A \subset A^*$.
(2) $A$ je samosdružený, právě když $A^* = A$.
(3) $A$ je normální, právě když $A^*A = AA^*$ (včetně definičních oborů).

**Věta 7.** *(1) Symetrický operátor je uzavíratelný.*
*(2) Uzávěr symetrického operátoru je symetrický.*
*(3) Je-li $A$ symetrický a $\operatorname{Dom} A = \mathcal{H}$, potom $A$ je omezený.*

*Důkaz.* (1) $A \subset A^*$, $A^*$ je uzavřený.

(2) $A \subset A^* \implies \overline{A} \subset A^* = (\overline{A})^*$. Obecně pro každý $B : \overline{\operatorname{Dom} B} = \mathcal{H}$, uzavíratelný, platí $B^* = (\overline{B})^*$.

$$\Gamma(B^*) = U(\Gamma(B))^\perp = (\overline{U(\Gamma(B))})^\perp = (U(\overline{\Gamma(B)}))^\perp = U(\Gamma(\overline{B}))^\perp = \Gamma((\overline{B})^*).$$

Druhá rovnost zleva plyne ze spojitosti skalárního součinu, třetí z unitarity $U$ a čtvrtá z uzavíratelnosti $B$.

(3) $A \subset \overline{A}$ existuje, $\operatorname{Dom} A = \mathcal{H}$, takže $A = \overline{A}$ a $A$ je omezený. □