1. Spektrum uzavřeného operátoru

Nejprve zopakujeme definici uzavřeného operátoru a definici spektra.

Definice 1. Grafem operátoru $A\colon X \to Y$ nazýváme podprostor vektorového prostoru $X \oplus Y$ daný vztahem

$$\Gamma(A) := \{[x, Ax] \mid x \in \operatorname{Dom} A\}.$$

Definice 2. Operátor A označujeme jako uzavřený, když $\Gamma(A)$ je uzavřený v $X \oplus Y$.

Tvrzení 3. *Operátor A je uzavřený, právě když pro každou posloupnost $x_n \in \operatorname{Dom} A$ platí*

$$x_n \to x \wedge Ax_n \to y \implies x \in \operatorname{Dom} A \wedge Ax = y.$$

Poznámka. Nechť A je uzavřený a A^{-1} existuje. Potom A^{-1} je uzavřený.

Definice 4. Operátor $A\colon X \mapsto Y$ je uzavíratelný (má uzávěr), právě když $\overline{\Gamma(A)}$ je grafem nějakého lineárního operátoru. Tento operátor pak značíme $\overline{A}$ a nazýváme uzávěr A. Jestliže A je uzavíratelný, pak existuje jeho nejmenší uzavřené rozšíření a je jím právě jeho uzávěr.

Tvrzení 5. *Operátor A lze uzavřít právě tehdy, když pro každou posloupnost $x_n \in \operatorname{Dom} A$ takovou, že $x_n \to 0$ a $Ax_n \to y$, platí $y = 0$. K tomu, aby x patřilo do definičního oboru $\overline{A}$ je nutné a stačí, aby existovala posloupnost $x_n \in \operatorname{Dom} A$ taková, že $x_n \to x$ a Ax_n konverguje, je-li to splněno, pak $Ax_n \to \overline{A}x$.*

Věta 6 (o uzavřeném grafu)**.** *Nechť $A\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ je uzavřený lineární operátor, $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ jsou Banachovy prostory. Potom jestliže $\operatorname{Dom} A = \mathcal{X}$, pak A je omezený.*

Důkaz. Podle předpokladů je $\Gamma(A)$ uzavřený podprostor v $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$, takže $\Gamma(A)$ je B-prostor s normou

$$\|[x, y]\|_{\oplus} = \|x\|_{\mathcal{X}} + \|y\|_{\mathcal{Y}}.$$

Zobrazení $S_1\colon \Gamma(A) \to \mathcal{X}$, $S_1([x, Ax]) = x$ je vzájemně jednoznačné spojité zobrazení prostorů $\Gamma(A)$ a $\mathcal{X}$, tudíž podle věty o inverzním zobrazení je S_1^{-1} spojité. Podobně zavedeme spojité zobrazení $S_2\colon \Gamma(A) \mapsto \mathcal{Y}$, $S_2([x, Ax]) = Ax$. Složené zobrazení $S_2 \circ S_1^{-1}$ je definováno na celém $\mathcal{X}$ a $\forall x \in \mathcal{X}$ platí $S_2(S_1^{-1}x) = Ax$ proto $A = S_2 \circ S_1^{-1}$. Protože složení dvou spojitých zobrazení je spojité, je i A spojité. $\square$

Poznámka. Součtem operátorů s různým definičním oborem budeme mít na mysli jejich součet na průniku definičních oborů, tedy $\operatorname{Dom}(A + B) = \operatorname{Dom} A \cap \operatorname{Dom} B$.

Poznámka. Je-li A uzavřený, je uzavřený také $A - \lambda I$ pro libovolné $\lambda \in \mathbb{C}$.

Definice 7. Buď $\mathcal{X}$ Banachův, $A\colon \operatorname{Dom} A \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ uzavřený operátor. O komplexním číslu λ řekneme, že je prvkem *rezolventní množiny* $\varrho(A)$, je-li operátor $A - \lambda I$ bijekce $\operatorname{Dom} A$ na $\mathcal{X}$. V opačném případě řekneme, že je λ prvkem spektra $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \varrho(A)$. Spektrum operátoru dále rozdělíme na tři disjunktní množiny. Není-li $A - \lambda I$ prostý, tj. jedná-li se o vlastní číslo A, řekneme, že je prvkem *bodového* spektra $\sigma_{\mathrm{p}}(A)$; je-li prostý, ale není surjektivní, zařadíme λ buď do *spojitého* spektra $\sigma_{\mathrm{c}}(A)$, je-li $\overline{\operatorname{Ran}(A - \lambda I)} = \mathcal{X}$, nebo do *reziduálního* spektra $\sigma_{\mathrm{r}}(A)$, je-li i $\overline{\operatorname{Ran}(A - \lambda I)} \neq \mathcal{X}$.

Poznámka. Pro prvky rezolventní množiny $\lambda \in \varrho(A)$ platí, že inverze $(A - \lambda I)^{-1}$ je uzavřený všude definovaný operátor na Banachově prostoru. Podle věty o uzavřeném grafu to znamená, že je $(A - \lambda I)^{-1}$ omezený.

Definice 8. Na rezolventní množině uzavřeného operátoru A definujeme tzv. *rezolventní funkci* neboli *rezolventu* $R_A\colon \varrho(A) \to \mathcal{B}(\mathcal{X})$ vztahem $R_A(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$. Je-li jasné, ke kterému operátoru rezolventa přísluší, značíme často R_λ nebo $R(\lambda)$ místo $R_A(\lambda)$.

Věta 9. *Buď $\mathcal{X}$ Banachův prostor nad $\mathbb{C}$, A hustě definovaný uzavřený operátor na $\mathcal{X}$. Potom $B(\lambda, 1/\|R(\lambda)\|) \subset \varrho(A)$ a pro každé $\mu \in B(\lambda, 1/\|R(\lambda)\|)$ je $R(\mu) = \sum_{k=0}^{+\infty} R(\lambda)^{k+1}(\mu - \lambda)^k$.*

Důkaz. [1] Pro důkaz konvergence opět stačí ukázat, že konverguje řada z norem. To je splněno, neboť

$$\left\|R(\lambda)^{k+1}(\mu-\lambda)^k\right\| \leq \|R(\lambda)\| \underbrace{(\|R(\lambda)\|\,(\mu-\lambda))}_{<1}{}^k.$$

Označme součet řady $B(\mu) := \sum_{k=0}^{+\infty} R(\lambda)^{k+1}(\mu-\lambda)^k$. Stačí ukázat $(A-\mu I)B(\mu) = I$ a $B(\mu)(A-\mu I) = I|_{\operatorname{Dom} A}$. Nejprve je potřeba ověřit, že sedí definiční obory. To je splněno, neboť $\operatorname{Dom} B(\mu) = \mathcal{X}$ a $\operatorname{Ran} B(\mu) \subset \operatorname{Ran} R(\lambda) \subset \operatorname{Dom} A$. Nyní upravme

$$(A-\mu)B(\mu) = (A-\lambda+\lambda-\mu)R(\lambda)\sum_{k=0}^{+\infty} R(\lambda)^k(\mu-\lambda)^k = (I-(\mu-\lambda)R(\lambda))\sum_{k=0}^{+\infty} R(\lambda)^k(\mu-\lambda)^k =$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} R(\lambda)^k(\mu-\lambda)^k - \sum_{k=1}^{+\infty} R(\lambda)^k(\mu-\lambda)^k = I.$$

Stejným způsobem se upraví součin v opačném pořadí. □

Důsledek. *Rezolventní množina je otevřená, tj. spektrum uzavřené.*

Věta 10. *Rezolventní funkce je spojitá, a dokonce holomorfní na rezolventní množině.*

Důkaz. Nejprve spojitost:

$$\|R(\mu)-R(\lambda)\| = \left\|\sum_{k=1}^{+\infty} R(\lambda)^{k+1}(\mu-\lambda)^k\right\| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \|R(\lambda)\|^{k+1}|\mu-\lambda|^k = \frac{\|R(\lambda)\|^2|\mu-\lambda|}{1-\|R(\lambda)\|\,|\mu-\lambda|}.$$

Nyní holomorfnost. Ukážeme, že $R'(\lambda) = R(\lambda)^2$.

$$\left\|\frac{1}{\mu-\lambda}(R(\mu)-R(\lambda)) - R(\lambda)^2\right\| = \left\|\sum_{k=2}^{+\infty} R(\lambda)^{k+1}(\mu-\lambda)^{k-1}\right\| \leq \frac{\|R(\lambda)\|^3|\mu-\lambda|}{1-\|R(\lambda)\|\,|\mu-\lambda|}.$$

□

Věta 11 (Hilbertova identita)**.** *Pro každé $\lambda, \mu \in \varrho(A)$, A uzavřený (obecně neomezený) operátor, platí*

$$(R_\lambda - R_\mu) = (\lambda-\mu)R_\lambda R_\mu.$$

kde R_λ je rezolventa A.

Důkaz. $\operatorname{Dom}(R_\lambda) = \operatorname{Dom}(R_\mu) = \mathcal{X}$ a $\operatorname{Ran}(R_\lambda) = \operatorname{Dom}(A-\lambda)$.

Je-li $\lambda \in \varrho(A)$, je $A-\lambda$ prostý. Stačí tedy pro každé $x \in \mathcal{X}$ dokázat rovnost

$$x = (A-\lambda)R_\lambda x \stackrel{?}{=} (A-\lambda)(R_\mu + (\lambda-\mu)R_\lambda R_\mu)x = \%$$

Ta ale platí, protože

$$\% = ((A-\mu)-\lambda+\mu)R_\mu x + (\lambda-\mu)R_\mu x = x + (-\lambda+\mu)R_\mu x + (\lambda-\mu)R_\mu x = x.$$

□

Důsledek. *Operátory R_λ a R_μ komutují.*

Důkaz. Úpravou $(\lambda-\mu)(R(\lambda)R(\mu) - R(\mu)R(\lambda))$. □

Věta 12. *Nechť $\mathcal{X}$ je Banachův prostor nad $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Potom*

(i) $\lambda \in \varrho(A)$, právě když $A-\lambda$ je bijekce $\mathcal{X}$ na $\mathcal{X}$.

(ii) $\sigma(A) \subset \{\lambda \mid |\lambda| \leq \|A\|\}$.

---

[1] Fanoušci pana profesora Havlíčka mohou využít lemma z FA1, které umožňuje zapsat B^{-1} jako součet geometrické řady se členy $(I-B)^k$. (Viz Modrá smrt, strana 96, lemma 3.6.4.) Příslušné lemma lze ostatně v této kapitole využít ještě minimálně jednou; kromě lenosti mě od jeho zařazení do wikiskript odrazovala i snaha držet se co nejpřesněji těch důkazů, které nám byly předvedeny na přednášce.

(iii) pro každé λ, $|\lambda| > \|A\|$ je

$$R_\lambda = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n.$$

(iv) $\sigma(A) \neq \emptyset$.

Důkaz. (1) Přímo z definice.

(2) Vyplývá z (iii).

(3) Protože $\frac{1}{|\lambda|}\|A\| < 1$, je

$$\tilde{R}_\lambda = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n \in \mathcal{B}(X).$$

Platí $(A-\lambda)\tilde{R}_\lambda = \tilde{R}_\lambda(A-\lambda) = I$, a proto $\tilde{R}_\lambda = (A-\lambda)^{-1} = R_\lambda$.

(4) Pro spor předpokládejme $\sigma(A) = \emptyset$, tj. $\varrho(A) = \mathbb{C}$. Rezolventa R_λ je tedy celá funkce (holomorfní na celém $\mathbb{C}$). Abychom mohli použít Liouvillovu větu, ukážeme ještě, že je omezená. Zobrazení $\lambda \mapsto R_\lambda$ je spojité, na kompaktní množině tedy musí být omezené, tedy $\sup_{\lambda \leq \|A\|+1} \|R_\lambda\| < +\infty$. Pro $\lambda > \|A\| + 1$ můžeme použít vyjádření z předchozího bodu

$$\|R_\lambda\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{-n-1} \|A\|^n = \frac{1}{|\lambda| - \|A\|} < 1.$$

Podle Liouvillovy věty je tím pádem rezolventní funkce konstantní, označme $R_\lambda = C$. Musí tedy $|C| = \lim_{|\lambda|\to+\infty} \|R_\lambda\| = 0$, tedy $R_\lambda = 0$. To je ale spor s tím, že R_λ je bijekce. □

Poznámka. Vyjádření rezolventy v předchozím bodě je jejím Laurentovým rozvojem na mezikruží $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > \|A\|\}$.

Číslo $r_\sigma(A) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ nazýváme spektrální poloměr A. V minulé větě jsme odvodili, že pro omezené operátory je $r_\sigma(A) \leq \|A\|$. Rezolventní funkce R_λ je analytická na mezikruží $\{\lambda \mid |\lambda| > r_\sigma(A)\}$, má na něm tedy Laurentův rozvoj. Z jednoznačnosti Laurentova rozvoje pak plyne, že odvozený vztah

$$R_\lambda = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} A^n \tag{1}$$

je platný pro všechna $|\lambda| > r_\sigma(A)$ i v případě $r_\sigma(A) < \|A\|$.

Věta 13. *Nechť $\mathcal{X}$ je Banachův prostor, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ a komplexní polynom $p \in \mathbb{C}(z)$. Potom $p(\sigma(A)) = \sigma(p(A))$.*

Důkaz. Buď $\lambda \in \mathbb{C}$, $p(z) - \lambda = a_n(z-\xi_1)\cdots(z-\xi_n)$, kde $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ jsou kořeny $p(z) - \lambda$ včetně násobností. Analogicky platí $p(A) - \lambda = a_n(A-\xi_1)\cdots(A-\xi_n)$.

Zobrazení $p(A) - \lambda \colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ je bijekce, právě když pro každé n je $A - \xi_n \colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ bijekce:

($\Leftarrow$) Složením bijekcí vznikne bijekce.

($\Rightarrow$) Je-li stupeň polynomu nula nebo jedna, je to triviální. Pro polynomy vyššího stupně využijeme toho, že operátory $A - \xi_i$ vzájemně komutují:

Pokud existuje i takové, že $A - \xi_i$ není prostá, existuje $x \neq 0$ tak, že $(A-\xi_i)x = 0$, ale potom i

$$a_n(A-\xi_1)\cdots(A-\xi_{i-1})(A-\xi_{i+1})\cdots(A-\xi_n)(A-\xi_i)x = 0,$$

pročež $p(A) - \lambda$ není prosté.

Pokud existuje i takové, že $\operatorname{Ran}(A-\xi_i) \neq \mathcal{X}$, potom

$$\operatorname{Ran}(a_n(A-\xi_i)(A-\xi_1)\cdots(A-\xi_{i-1})(A-\xi_{i+1})\cdots(A-\xi_n)) \subset \operatorname{Ran}(A-\xi_i) \neq \mathcal{X}.$$

Dále platí: $\lambda \in \sigma(p(A)) \iff p(A)-\lambda \colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ není bijekce $\iff \exists i$ tak, že $A - \xi_i$ není bijekce $\iff \exists i$ tak, že $\xi_i \in \sigma(A) \iff \exists z \in \sigma(A)$, $(z = \xi_i)$, $p(z) = \lambda \iff \lambda \in p(\sigma(A))$. □

Důsledek. *Pro každé $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ a $n \in \mathbb{N}_0$ platí $r_\sigma(A)^n = r_\sigma(A^n)$.*

Lemma 14. *Buď $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Potom $r_\sigma(A) \leq \liminf \|A^n\|^{1/n}$.*

Důkaz. Spojením předchozího důsledku a známé nerovnosti $r_\sigma(B) \leq \|B\|$ získáváme pro každé přirozené n odhad $r_\sigma(A)^n = r_\sigma(A^n) \leq \|A^n\|$. Odmocněním a následným aplikováním $\liminf$ získáme požadovanou nerovnost. □

Lemma 15. *Buď $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Potom $r_\sigma(A) \geq \limsup \|A^n\|^{1/n}$.*

Důkaz. Nejprve ukažme, že pro $0 < |\lambda| < r_\sigma(A)$ řada $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} A^n$ nekonverguje, ale pro $|\lambda| > r_\sigma(A)$ konverguje.

(1) Víme, že je-li $|\lambda| > r_\sigma(A)$, dotyčná řada konverguje. Představuje totiž Laurentův rozvoj rezolventy, a ten je jednoznačně daný.

(2) Sporem ukážeme, že je-li $|\lambda| < r_\sigma(A)$, řada nekonverguje. Kdyby existovalo λ_0, $|\lambda_0| < r_\sigma(A)$ a řada konvergovala, potom

$$\exists C \geq 0 \text{ takové, že } \forall n \in N \quad \left\| \frac{A^n}{\lambda_0^{n+1}} \right\| \leq C.$$

Z toho můžeme pro každé λ, $|\lambda| > |\lambda_0|$ vyvodit

$$\left\| \frac{1}{\lambda^{n+1}} A^n \right\| = \left| \frac{\lambda_0}{\lambda} \right|^{n+1} \left\| \frac{1}{\lambda_0^{n+1}} A^n \right\| \leq C \left| \frac{\lambda_0}{\lambda} \right|^{n+1},$$

tj. příslušná řada konverguje jako geometrická řada, její součet představuje rezolventu a spektrální poloměr tedy nemůže být větší než λ_0.

Je-li $|\lambda| < \limsup \|A^n\|^{1/n}$, existuje nekonečně mnoho n takových, že $|\lambda| < \|A^n\|^{1/n}$ neboli

$$1 < \left\| \frac{1}{\lambda^n} A^n \right\|.$$

Není tedy splněna ani nutná podmínka konvergence a řada pro každé λ, $\lambda < \limsup \|A^n\|^{1/n}$ diverguje. Z toho, co jsme si prve dokázali o spektrálním poloměru, ale nezbytně vyplývá požadovaná nerovnost. □

Věta 16. *Nechť $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Potom*

$$r_\sigma(A) = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{1/n}.$$

Důkaz. Větu ihned dostáváme spojením předchozích dvou lemmat.[2] Všimněme si ještě, že podle věty mimo jiné příslušná limita vždy existuje (což není vůbec samozřejmé). □

Lemma 17. *Nechť $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, potom $(\operatorname{Ran} A)^\perp = \operatorname{Ker} A^*$.*

Důkaz. $x \in (\operatorname{Ran} A)^\perp \Leftrightarrow \forall y \in \mathcal{H}\ \langle x, Ay \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall y \in \mathcal{H}\ \langle A^* x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker} A^*$. □

Důsledek. *Nechť $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, pak $\overline{\operatorname{Ran} A} = (\operatorname{Ker} A^*)^\perp$.*

Nyní se podrobněji podíváme na spektrální vlastnosti normálních a hermitovských operátorů. Dále tedy budeme uvažovat, že $\mathcal{H}$ je Hilbertův prostor.

Definice 18. Operátor $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nazveme *normální*, je-li splněno $AA^* = A^*A$ a *hermitovský*, je-li splněno $A = A^*$.

Poznámka. Zejména při práci s hermitovskými operátory pro nás bude důležitá seskvilineární forma $f_A(x, y) = \langle x, Ay \rangle$, kde $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Dva operátory A a B se rovnají, právě když se rovnají příslušné formy, neboť $\forall x, y \in \mathcal{H}\ \langle x, Ay \rangle = \langle x, By \rangle \iff \forall x, y \in \mathcal{H}\ \langle x, (A - B)y \rangle = 0 \iff$

[2] Zde jsme si dovolili výraznější odchýlení od přednášky, protože důkaz na ní prezentovaný je zbytečně o krok delší. Nejprve se totiž dokazuje silnější podoba lemmatu 15: spektrální poloměr je *roven* příslušnému limes superior. Následně se prohlásí, že musíme ověřit existenci limity, a slavnostně se dokáže lemma 14. Prostým přeuspořádáním důkazu z přednášky dostáváme důkaz ze skript, v němž ale jednu pasáž můžeme vypustit.

$\forall y \in \mathcal{H}\ (A-B)y = 0$. Protože seskvilineární forma je určena jednoznačně svojí diagonálou prostřednictvím polarizační formule[3], znamená to, že

$$A = B \iff \forall x \in \mathcal{H}\ \langle x, Ax\rangle = \langle x, Bx\rangle.$$

Snadno vidíme, že operátor je hermitovský, právě když je příslušná forma symetrická, a víme, že to nastane právě tehdy, když je reálná, tedy

$$A = A^* \iff \forall x \in \mathcal{H}\ \langle x, Ax\rangle \in \mathbb{R}.$$

Lemma 19. *Operátor $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je normální, právě když pro každé $x \in \mathcal{H}$ je $\|Ax\| = \|A^*x\|$.*

Důkaz.

$$\|Ax\|^2 = \|A^*x\|^2 \iff \langle x, A^*Ax\rangle = \langle x, AA^*x\rangle \iff A^*A = AA^*.$$

□

Věta 20 (Weylovo kritérium)**.** *Nechť $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normální. Potom platí:*

(i) $\lambda \in \varrho(A)$*, právě když existuje $M > 0$ tak, že $\forall x \in \mathcal{H}$ je $\|(A-\lambda)x\| \geq M\|x\|$, tj. právě když $\inf_{\|x\|=1} \|(A-\lambda I)x\| > 0$.*

(ii) $\lambda \in \sigma(A)$*, právě když existuje $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$, $\|x_n\| = 1$, $\lim \|(A-\lambda)x_n\| = 0$.*

Důkaz. První ekvivalence v (i) jinými slovy říká, že rezolventní množina A je shodná s tzv. oblastí regularity A, tu v následujících odstavcích dokážeme. Druhá ekvivalence je zřejmá a tvrzení (ii) je pouze obměnou ekvivalence (i).

($\Rightarrow$) Buď $\lambda \in \varrho(A)$. Potom pro $x \in \mathcal{H}$ je

$$\|x\| = \|R_\lambda(A-\lambda)x\| \leq \|R_\lambda\| \|(A-\lambda)x\|.$$

Stačí volit $M = 1/\|R_\lambda\|$.

($\Leftarrow$) Je-li $(A-\lambda)x = 0$, potom $M\|x\| = 0$ a $x = 0$. $(A-\lambda)$ je tedy prosté, zbývá ukázat, že je na. Protože A je normální, je $\overline{\operatorname{Ran}(A-\lambda)} = \operatorname{Ker}(A^*-\bar{\lambda})^\perp = \operatorname{Ker}(A-\lambda)^\perp = \{0\}^\perp = \mathcal{H}$. Zbývá tedy ukázat uzavřenost oboru hodnot. Vezměme konvergentní posloupnost $y_n \in \operatorname{Ran} A-\lambda$, $y_n \to y \in \overline{\operatorname{Ran}(A-\lambda)}$. A vezměme odpovídající $x_n \in \mathcal{H}$ takovou, že $(A-\lambda)x_n = y_n$. Ta je cauchyovská, neboť

$$\|y_n - y_m\| = \|(A-\lambda)(x_n - x_m)\| \geq M\|x_n - x_m\|.$$

Má tedy limitu x a ze spojitosti A už plyne $y = (A-\lambda)x \in \operatorname{Ran}(A-\lambda)$. □

Poznámka. Část důkazu Weylova kritéria opakuje důkaz tvrzení, které by čtenář měl znát z FA1: „Reziduální spektrum normálního operátoru je prázdné.“

Tvrzení 21. *Nechť $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $A^* = A$. Potom $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

Důkaz. Buď $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = \mu + \mathbf{i}\nu$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Protože $A = A^*$, je $\langle (A-\mu)x, \nu x\rangle = \nu\langle Ax, x\rangle - \mu\nu\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$, z čehož plyne

$$\|(A-\lambda)x\|^2 = \langle (A-\mu)x - i\nu x, (A-\mu)x - i\nu x\rangle = \|(A-\mu)x\|^2 + |\nu|^2\|x\|^2 \geq |\nu|^2\|x\|^2,$$

takže $\|(A-\lambda)x\| \geq |\Im\lambda|\,\|x\|$ pro každé x, a tedy $\lambda \notin \mathbb{R} \implies \lambda \in \varrho(A)$. □

Definice 22. Hermitovský operátor nazveme pozitivní, jestliže pro všechna $x \in \mathcal{H}$ platí

$$\langle x, Ax\rangle \geq 0,$$

to jest, jestliže je příslušná seskvilineární forma $\langle x, y\rangle_A = \langle x, Ay\rangle$ také pozitivní (ne nutně pozitivně definitní, tj. diagonálou je seminorma, ne nutně norma). Pro pozitivní seskvilineární formy platí Cauchyho–Schwarzova nerovnost, která v tomto případě nabude tvaru

$$|\langle x, Ay\rangle|^2 \leq \langle x, Ax\rangle\langle y, Ay\rangle.$$

[3] Pozor, toto platí pouze nad tělesem $\mathbb{C}$. Na $\mathbb{R}$ totiž polarizační formule pro seskvilineární formy obecně neplatí. Protipříkladem je například operátor otočení o pravý úhel v $\mathbb{R}^2$, pro který je $\langle x, Ax\rangle$ vždy nula. Toto se ale člověk ve škole nedozví a ani mu nehrozí, že by to po něm někdo chtěl na zkoušce.

S pomocí této definice lze mezi hermitovskými operátory zavést uspořádání. Řekneme, že A je větší nebo roven B, jestliže $A - B$ je pozitivní operátor, tj. symbolicky

$$A \geq B \iff \forall x \in \mathcal{H}\ \langle x, Ax\rangle \geq \langle x, Bx\rangle.$$

Lemma 23. *Nechť $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $A \geq 0$. Potom $\|Ax\|^2 \leq \|A\| \langle x, Ax\rangle$.*

Důkaz. Vezmeme Cauchyho–Schwarzovu nerovnost pro formu $\langle x, y\rangle_A = \langle x, Ay\rangle$ a poté Cauchyho–Schwarzovu nerovnost pro skalární součin.

$$\|Ax\|^4 = |\langle Ax, Ax\rangle|^2 \leq \langle x, Ax\rangle\langle Ax, A^2x\rangle \leq \langle x, Ax\rangle \|Ax\| \left\|A^2x\right\| \leq \langle x, Ax\rangle \|Ax\|^2 \|A\|.$$

Pro $Ax = 0$ je požadovaná nerovnost triviální, v opačném případě ji získáváme vydělením předchozího vztahu. □

Definice 24. Pro $A = A^*$ označíme

$$M_A := \sup_{\|x\|=1} \langle x, Ax\rangle, \quad m_A := \inf_{\|x\|=1} \langle x, Ax\rangle.$$

Věta 25. *Nechť $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $A = A^*$. Potom*

(i) $\sigma(A) \subset [m_A, M_A]$,

(ii) $m_A, M_A \in \sigma(A)$.

Důkaz. (1) Už víme, že spektrum je podmnožinou $\mathbb{R}$. Ukážeme, že $\lambda > M_A \implies \lambda \in \varrho(A)$. Z definice M_A plyne $\langle x, Ax\rangle \leq M_A \|x\|^2$ pro každé x, a tedy pro $\lambda > M_A$ je

$$(\lambda - M_A)\|x\|^2 \leq \lambda\langle x, x\rangle - \langle x, Ax\rangle = \langle x, (\lambda - A)x\rangle \leq \|x\| \|(A - \lambda)x\|$$

pro každé x. Po vydělení $\|x\|$ z Weylova kritéria plyne, že $\lambda \in \varrho(A)$.

(2) Buď $x_n \in \mathcal{H}$, $\|x_n\| = 1$, $M_A = \lim_{n\to\infty}\langle x_n, Ax_n\rangle$. Potom $\langle x_n, (M_A - A)x_n\rangle \to 0$ a

$$\|(M_A - A)x_n\|^2 \leq \|M_A - A\| \langle x_n, (M_A - A)x_n\rangle \to 0.$$

Z Weylova kritéria pak vyplývá $M_A \in \sigma(A)$. □

Věta 26. *Nechť $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $A^* = A$. Potom*

$$\|A\| = r_\sigma(A) = \max\{|m_A|, |M_A|\} = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, Ax\rangle|.$$

Důkaz. Ukážeme první rovnost. Druhá snadno plyne z předchozí věty (obě čísla m_A a M_A jsou prvky spektra) a třetí z definice čísel m_A a M_A.

Pro $\|x\| = 1$ plyne ze Schwarzovy nerovnosti $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle x, A^2x\rangle \leq \left\|A^2x\right\|$, tedy $\|A\|^2 \leq \left\|A^2\right\|$, současně ale pro každý operátor platí $\left\|A^2\right\| \leq \|A\|^2$, takže celkem $\left\|A^2\right\| = \|A\|^2$. Indukcí to zobecníme na $\left\|A^{2^n}\right\| = \|A\|^{2^n}$: Pro $n = 1$ to platí a

$$\left\|A^{2^{n+1}}\right\| = \left\|(A^{2^n})^2\right\| = \left\|A^{2^n}\right\|^2 = \left(\|A\|^{2^n}\right)^2 = \|A\|^{2^{n+1}}.$$

Konečně

$$r_\sigma = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left\|A^{2^n}\right\|^{2^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \|A\| = \|A\|. \quad \square$$

Poznámka. S využitím znalostí z předešlého důkazu není těžké dokázat, že pro hermitovský (a s využitím jedné věty z některé z následujících kapitol i normální) operátor dokonce platí $\left\|A^k\right\| = \|A\|^k$. Ale ani toto tvrzení se na FA2 neprobírá – jen jsem nemohl odolat a musel jsem ho sem připsat. Konec konců by to někdo mohl dostat u zkoušky jako jednoduché „neznámé tvrzení“.