1 Riccatiho rovnice

Zamyslete se:

Jaký tvar má Riccatiho rovnice?
Jakými způsoby je neřešitelná? :-)
Jakým způsobem lze hledat řešení, když známe jedno konkrétní řešení?
Jaký je vztah mezi Riccatiho rovnicí a mezi mezi LDR II.řádu?

$$tvar : y' = a_0(x) + a_1(x) \cdot y + a_2(x) \cdot y^2$$

Příklad č.1

Nalezněte další řešení rovnice:

$$y' = y^2 - xy - x$$

přičemž víme, že jedno konkrétní řešení má tvar: $y = ax + b$. Čili $y' = a$.

$$a = a^2 \cdot x^2 + 2ab \cdot x + b^2 - ax^2 - bx - x$$
$$a = (a^2 - a) \cdot x^2 + (2ab - b - 1) + b^2 - a = 0$$

Nyní musíme dát rovnosti u různých mocnin x do rovnosti, z čehož nám vyjde, že vyhovuje rovnost $a = 1, b = 1$. Každý sám si tohle ověřte. Může se stát, že ty tři nebo více rovností může splňovat více dvojic či trojic čísel.

Nyní tedy máme jedno konkrétní řešení. Ze znalosti z přednášky tedy víme, že můžeme zbývající dopočítat pomocí algoritmu, který si teď ukážeme.

Zavádím nové řešení:

$$y = y_1 + \tfrac{1}{u}$$
$$y = x + 1 + \tfrac{1}{u}$$
$$1 - \tfrac{u'}{u^2} = (x + 1 + \tfrac{1}{u})^2 - x \cdot (x + 1 + \tfrac{1}{u}) - x$$
$$1 - \tfrac{u'}{u^2} = x^2 + 1 + \tfrac{1}{u^2} + 2x + 2\tfrac{x}{u} + \tfrac{2}{u} - x^2 - x - \tfrac{x}{u} - x$$
$$-\tfrac{u'}{u^2} = \tfrac{1}{u^2} + \tfrac{x}{u} + \tfrac{2}{u}$$
$$-u' = 1 + ux + 2u$$

čímž jsem se dostal do tvaru:

$$u' + (x + 2) \cdot u = -1$$

Jak všichni vidí, je to LDR. Řešení nechám na Vás samotných. Jen upozorním na to, že řešení nevyjde nijak pěkně, asi nějak takto to stačí nechat:

$$y = x + 1 + \frac{e^{\frac{x^2}{2}+2x}}{C - \int e^{\frac{x^2}{2}+2x} dx}$$