1 Homogenní diferenciální rovnice

Zamyslete se:

Jaký je tvar homogenní diferenciální rovnice?
Jaká substituce vede k řešení?
Jak je to s otázkou jednoznačnosti?

$$tvar : P(x,y) + Q(x,y) \cdot y' = 0$$

kde P,Q jsou homogenní funkce stejného stupně.

Příklad č.1

Řešte:

$$x^2 \cdot y' = x \cdot y + y^2 \cdot e^{-\frac{x}{y}}$$

Podle znalostí z přednášky použiji substituci: $y = x \cdot u$, tedy $y' = u + x \cdot u'$. Provedu dosazení do rovnice a dostávám:

$$x^2(u + u' \cdot x) = x^2 \cdot u + x^2 \cdot u^2 \cdot e^{-\frac{1}{u}}$$

$$u' \cdot x^3 = x^2 u^2 \cdot e^{-\frac{1}{u}} \ldots x \neq 0;$$

$$\frac{e^{\frac{1}{u}} \cdot u'}{u^2} = \frac{1}{x}$$

čímž jsme dostali tvar, který už ale známe. V rámci procvičení nechám dopočítání na Vás. Jedná se o rovnici separovanou.

Příklad č.2

Řešte:

$$|y' \cdot x - y| = \sqrt{x^2 + (y' \cdot x)^2}$$

Budu tedy postupovat:

$$(y' \cdot x - y)^2 = x^2 + (y' \cdot x)^2$$

$$(y' \cdot x)^2 - 2x^2 \cdot y' + y^2 = x^2 + (y' \cdot x)^2$$

použiji substituci: $y = x \cdot u$, $y' = u + x \cdot u'$ po které dostávám:

$$\begin{gathered}(x \cdot u)^2 - 2x^2 \cdot u \cdot (u + x \cdot u') - x^2 = 0 \\ u^2 - 2u^2 - 2x \cdot u \cdot u' - 1 = 0 \\ 2xu \cdot u' + u^2 - 1 = 0 \\ 2xu \cdot u' = 1 + u^2\end{gathered}$$

což můžu upravit na nám známý tvar:

$$\frac{2u \cdot u'}{1 + u^2} = \frac{1}{x}$$

a dále to nechám na Vaší píli.

Příklad č.3

Řešte:

$$\sqrt{x^2 + (y' \cdot x)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Jen naznačím jak by se postupovalo:

$$\begin{gathered}y' \cdot x = y \\ y' \cdot x = -y\end{gathered}$$

je třeba vyřešit oba případy!

Příklad č.4

Řešte:

$$|y - y' \cdot x| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Nechám na samostatné přípravě.

Příklad č.5

Řešte (sami):

$$y' = \frac{x - y}{x - 2y}$$