1. Relace

▶ 1.0.1. Definice. Nechť $M_1, \ldots, M_n$ jsou libovolné množiny. Potom libovolné $\rho \subseteq M_1 \times \cdots \times M_n$ nazveme n-ární relací na $M_1 \times \cdots \times M_n$ a číslo n aritou relace ρ.

▶ 1.0.2. Definice.

(1) Každé $R \subseteq M^2$ nazýváme binární relace na M^2.

(2) $R^{-1} := \{\langle a, b\rangle \mid \langle b, a\rangle \in R\}$ je inverzní relace k R.

(3) $R \circ S = RS := \{\langle a, c\rangle \mid \exists b \in M(\langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, c\rangle \in S)\}$ je součin relací.

(4) $D_M = \{\langle a, a\rangle \mid a \in M\}$ je diagonála.

▶ 1.0.3. Definice. Definujeme obecné vlastnosti, předpokládáme platnost výroků pro všechna $a, b, c \in M$. Binární relace je:

(1) reflexivní $\iff \langle a, a\rangle \in R \iff D_M \subseteq R$;

(2) transitivní $\iff \langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, c\rangle \in R \Rightarrow \langle a, c\rangle \in R \iff RR \subseteq R$;

(3) symetrická $\iff \langle a, b\rangle \in R \Leftrightarrow \langle b, a\rangle \in R \iff R^{-1} = R$;

(4) slabě antisymetrická $\iff \langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, a\rangle \in R \Rightarrow a = b \iff R^{-1} \cap R \subseteq D_M$;

(5) silně antisymetrická $\iff \langle a, b\rangle \in R \Rightarrow \langle b, a\rangle \notin R \iff R^{-1} \cap R = \emptyset$;

(6) trichotonická $\iff \langle a, b\rangle \notin R \Rightarrow (\langle b, a\rangle \in R \vee a = b) \iff R^{-1} \cup R \cup D_M = M^2$;

▶ 1.0.4. Definice. Rozlišujeme následující typy relací:

(1) ekvivalence (zn. $\equiv$) je reflexivní, transitivní a symetrická. Ekvivalence rozděluje množinu na třídy ekvivalence. Množina $M_{/\equiv}$ všech tříd ekvivalence se nazývá faktorová množina nebo též faktor-množina M podle $\equiv$.

(2) uspořádání (zn. $\leq$) je relace reflexivní, transitivní a slabě antisymetrická.

(3) ostré uspořádání (zn. $<$) je relace transitivní a silně antisymetrická. Platí:

$$a \leq b \Leftrightarrow a = b \vee a < b,$$

$$a < b \Leftrightarrow a \neq b \wedge a \leq b.$$

(4) úplné uspořádání (lineární uspořádání) je relace trichotonická (každé dva prvky jsou srovnatelné), slabě antisymetrická, transitivní a reflexivní.