POZNÁMKY Z PRAVDĚPODOBNOSTI

JINDŘICH MAKOVIČKA

Obsah

1. Úvod	2
1.1. Prostor elementárních jevů, algebra jevů	2
1.2. Axiomy pravděpodobnostního prostoru	2
1.3. Podmíněná pravděpodobnost	4
1.4. Stochastická nezávislost jevů	6
1.5. Borelovská algebra, borelovsky měřitelné funkce	6
1.6. Operace s náhodnými veličinami	7
1.7. Distribuční funkce náhodné veličiny	8
2. Diskrétní náhodné veličiny	10
2.1. Alternativní (Bernoulliho) rozdělení	10
2.2. Diracovo rozdělení	10
2.3. Binomické rozdělení	10
2.4. Geometrické (Pascalovo) rozdělení	11
2.5. Negativně binomické rozdělení	11
2.6. Hypergeometrické rozdělení	11
2.7. Poissonovo rozdělení	11
3. Vícerozměrná diskrétní rozdělení	13
3.1. Multihypergeometrické rozdělení	13
3.2. Multinomické rozdělení	13
4. Absolutně spojitá rozdělení	13
5. Funkce náhodných veličin	16
6. Příklady absolutně spojitých rozdělení	18
6.1. Gama rozdělení	18
6.2. Beta rozdělení	18
6.3. Rovnoměrné rozdělení	18
6.4. Exponenciální rozdělení	18
6.5. Normální (Gaussovo) rozdělení	20
6.6. Rozdělení χ^2 (Pearsonovo)	21
6.7. Studentovo rozdělení	23
6.8. Fisherovo rozdělení	23
6.9. Exponenciální třída hustot	23
6.10. Weibullovo rozdělení	23
7. Charakteristiky náhodných veličin	23
8. Charakteristiky vícerozměrných náhodných veličin	29
9. Konvergence na prostoru náhodných veličin	30
10. Limitní věty teorie pravděpodobnosti	32
11. Základní pojmy ze statistiky	35
12. Odhad parametrů rozdělení	36
12.1. Metoda momentů	37
12.2. Nestranné odhady s minimálním rozptylem (MVUE)	38
12.3. Asymptotické metody odhadu Θ	43
12.4. Odhady metodou maximální věrohodnosti	44
13. Disclaimer	49

1. Úvod

1.1. Prostor elementárních jevů, algebra jevů.

Definice 1. Označme Ω prostor elementárních jevů, $\omega \in \Omega$ elementární jev, $A \subset \Omega$ jev.

Definice 2. Buďte A, B jevy, potom

- $A = \Omega$ je **jev jistý**.
- A^{C} je **jev opačný** k jevu A. Platí $\omega \in A \veebar \omega \in A^{\mathrm{C}}$.
- $A \cup B$ je jev, kdy nastává A nebo B.
- Pokud A a B nenastávají současně, říkáme, že jde o jevy **navzájem neslučitelné**.
- Jsou-li A, B neslučitelné, píšeme $+$ místo $\cup$: $A + B$.
- $A \subset B$, právě když platí $\omega \in A \implies \omega \in B$.
- $A \cap B$ $(A \cdot B)$ je jev, kdy A a B nastávají současně.
- $\emptyset$ je **jev nemožný**.
- $A = B$, právě když $A \subset B$ a $B \subset A$.
- $A - B$ je jev, kdy A nastane a B nenastane.
- Symetrická diference $A \mathbin{\triangle} B = (A - B) \cup (B - A)$.

Pozorování. Je-li $A \cup B = \emptyset$, pak A a B jsou neslučitelné.

Věta 3. Nechť $A, B, C \subset \Omega$ jsou jevy, $N \in \mathbb{N}$ nebo $+\infty$. Pak

1. $A \subset A$;
2. $A \subset B \wedge B \subset C \implies A \subset C$;
3. $A \cap A = A$, $A \cup A = A$;
4. $A \cup A = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
6. $\emptyset \subset A \subset \Omega$;
7. $A \cap B \subset A \subset A \cup B$;
8. $\emptyset \cap A = \emptyset$, $\emptyset \cup A \subset A$;
9. $\Omega \cap A = A$, $\Omega \cup A = \Omega$;
10. $(A^{\mathrm{C}})^{\mathrm{C}} = A$;
11. $(A \cup B)^{\mathrm{C}} = A^{\mathrm{C}} \cap B^{\mathrm{C}}$, $(A \cap B)^{\mathrm{C}} = A^{\mathrm{C}} \cup B^{\mathrm{C}}$;
12. $A \cup B = A + BA^{\mathrm{C}}$;
13. $B = AB + A^{\mathrm{C}}B$;
14. $A \cap (B \cup C) = AB \cup AC$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
15. $$\bigcup_{n=1}^{N} A_n = A_1 + \sum_{n=2}^{N} A_1^{\mathrm{C}} \cdot A_{n-1}^{\mathrm{C}} A_n;$$
16. $$\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)^{\mathrm{C}} = \bigcap_{n=1}^{N} A_n^{\mathrm{C}}, \quad \left(\bigcap_{n=1}^{N} A_n\right)^{\mathrm{C}} = \bigcup_{n=1}^{N} A_n^{\mathrm{C}};$$
17. $A \cap A^{\mathrm{C}} = \emptyset$;
18. $A \cup A^{\mathrm{C}} = \Omega$;
19. $A \cap (B + C) = AB + AC$.

1.2. Axiomy pravděpodobnostního prostoru.

Definice 4. Buď Ω prostor elementárních jevů, $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ množina jevů. Požadujeme, aby $\mathcal{A}$ tvořila σ-algebru jevů, tj. aby

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2. $A \in \mathcal{A} \implies A^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}$;

3. $A_1, A_2, \dots, A_\infty \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

Poznámka. Ne všechny podmnožiny Ω jsou jevy. To platí pouze u spočetných Ω.

Pozorování. $\Omega \in \mathcal{A}$, $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$.

Důkaz. 1. $\emptyset \in \mathcal{A} \implies \Omega = \emptyset^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}$;
2. Stačí položit $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \emptyset$.

□

Věta 5. Buďte $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A}$. Potom

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}.$$

Důkaz. Protože $A_j \in \mathcal{A}$, podle axiomu 2 je $A_j^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}$, podle axiomu 3

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A} \implies \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j^{\mathrm{C}} \right)^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A} \implies \bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}.$$

□

Definice 6. Pravděpodobnost P je funkce $P : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}$ taková, že
1. $P(A) \geq 0$ pro každé $A \mapsto \mathcal{A}$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. Pro každé $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A}$ disjunktní je

$$P\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j).$$

Věta 7. 1. $P(\emptyset) = 0$.
2.

$$P\left(\sum_{j=1}^{n} A_j \right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$$

Důkaz. 1. $\Omega \in \mathcal{A}$, $P(\Omega) = 1$, $\Omega^{\mathrm{C}} = \emptyset$. Protože $\Omega + \emptyset + \emptyset + \cdots = \Omega$, je

$$\sum_{1}^{\infty} P(\emptyset) = 0$$

a $P(\emptyset) = 0$.
2. Stačí zvolit $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \emptyset$, potom

$$P\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) + 0.$$

□

Věta 8. Buďte $A, B \in \mathcal{A}$. Pak $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Důkaz. $A \cup B = A + (B \cap A^{\mathrm{C}})$, $P(A \cap B) = P(A) + P(B \cap A^{\mathrm{C}})$; dále platí $B = B \cap A^{\mathrm{C}} + A \cap B$ a $P(B) = P(B \cap A^{\mathrm{C}}) + P(A \cap B)$. Z toho okamžitě vyplývá tvrzení věty. □

Poznámka. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Věta 9 (Booleova nerovnost)**.** $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

Důsledek.

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{N,\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{N,\infty} P(A_j)$$

Věta 10. $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$

Důkaz. $B = A + B \cap A^{\mathrm{C}}$, $P(B) = P(A) + P(B \cap A^{\mathrm{C}})$, přičemž $P(B \cap A^{\mathrm{C}}) \geq 0$. □

Důsledek. $P(A) \leq 1$, neboť $A \subset \Omega$.

Lemma 11 (o spojitosti)**.** Pravděpodobnost je spojitá funkce shora i zdola:

1. Nechť $A_n \in \mathcal{A}$, $A_n \nearrow A$, $(A_n \subset A_{n+1})$, $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_n$. Pak $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$.
2. Nechť $A_n \in \mathcal{A}$, $A_n \searrow A$, $(A_n \supset A_{n+1})$, $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_n$. Pak $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$.

Důkaz. 1. Nechť $A_n \searrow \emptyset$, dokážeme, že v tom případě $P(A_n) \to 0$

(a) Existence limity plyne z monotonie pravděpodobnosti $P(A_n) \geq P(A_{n+1})$ a pozitivity $P \geq 0$.

(b) Buď $B_n = A_n - A_{n+1}$, potom

$$A_n = \sum_{j=n}^{\infty} B_j.$$

Protože

$$A_1 = \sum_{j=1}^{\infty} B_j,$$

a B_j jsou disjunktní, je

$$P(A_1) = \sum_{j=1}^{\infty} P(B_j).$$

Řada na pravé straně konverguje, proto je

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=n}^{\infty} P(B_j) = 0.$$

2. Buď $A \neq \emptyset$, $A_n \searrow A \neq \emptyset$. Platí $A_n = (A_n - A) + A$, $P(A_n) = P(A_n - A) + P(A)$. Potom $P(A_n - A) \to 0$ a $P(A_n) \to P(A)$.
3. Buď $A \neq \emptyset$, $A_n \nearrow A \neq \emptyset$. Platí $A = (A - A_n) + A_n$, $P(A) = P(A - A_n) + P(A_n)$. Potom $P(A - A_n) \to 0$ a $P(A_n) \to P(A)$.

□

1.3. **Podmíněná pravděpodobnost.**

Definice 12. Nechť $P(B) > 0$. Pak podmíněná pravděpodobnost A za předpokladu jevu B je definována jako

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Věta 13. $P(\cdot|B)$ je pravděpodobnost ve smyslu definice 6.

Důkaz. 1.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0;$$

2.

$$P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1;$$

3.

$$P\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j \middle| B\right) = \frac{P\left(\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j\right) \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\sum_{j=1}^{\infty} (A_j \cap B)\right)}{P(B)} =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{\infty} P(A_j \cap B)}{P(B)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)}$$

□

Věta 14 (o násobení pravděpodobnosti)**.** Buďte $A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ tak, že platí $P(A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$. Pak

$$P(A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_0)P(A_1|A_0)P(A_2|A_0 \cap A_1) \cdots P(A_n|A_0 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Důkaz. Platí

$$A_0 \cap \dots \cap A_n \subset A_0 \cap \dots \cap A_{n-1} \subset \dots \subset A_0$$

a

$$0 < P(A_0 \cap \dots \cap A_n) \leq P(A_0 \cap \dots \cap A_{n-1}) \leq \dots \leq P(A_0)$$

Pro $n = 1$ je to definice podmíněné pravděpodobnosti. Přechod $n \to n+1$:

$$P(\underbrace{A_0 \cdots A_n}_{B} A_{n+1}) = P(A_0 \cdots A_n)P(A_{n+1}|A_0 \cdots A_n).$$

Pro $P(A_0 \cdots A_n)$ využijeme indukčního předpokladu. □

Věta 15 (o úplnosti)**.** Nechť $(H_n)_{n=1}^{N}$ tvoří úplný rozklad jistého jevu, tj. $P(H_n) > 0$, H_n jsou disjunktní a

$$P\left(\sum_{j=1}^{N} H_j\right) = 1.$$

Pak

$$P(A) = \sum_{j=1}^{N} P(A|H_n)P(H_n).$$

Důkaz.

$$P(A) = P\left(A \cap \left(\sum_{j=1}^{N} H_j\right)\right) + P\left(A \cap \left(\sum_{j=1}^{N} H_j\right)^{\mathrm{C}}\right) =$$

$$= P\left(\sum_{j=1}^{N} (A \cap H_j)\right) + P\left(\left(\sum_{j=1}^{N} H_j\right)^{\mathrm{C}}\right) = \sum_{j=1}^{N} P(A \cap H_j)$$

□

Věta 16 (Bayes)**.** Nechť $(H_n)_{j=1}^{N}$ tvoří úplný rozklad jistého jevu a $P(A) > 0$. Pak

$$P(H_j|A) = \frac{P(A|H_j)P(H_j)}{\sum_{i=1}^{N} P(A|H_i)P(H_i)}.$$

Důkaz.

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|H_j)P(H_j)}{\sum_{i=1}^{N} P(A|H_i)P(H_i)}$$

□

1.4. **Stochastická nezávislost jevů.**

Definice 17. Nechť $\mathcal{C}$ značí systém jevů. Jevy z $\mathcal{C}$ nazýváme **nezávislé**, pokud pro každý konečný systém $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}$ platí $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$.

Věta 18. Buďte A, B nezávislé jevy. Potom A a B^{C} jsou nezávislé.

Důkaz. Protože $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^{\mathrm{C}})$, je $P(A \cap B^{\mathrm{C}}) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^{\mathrm{C}})$ □

Důsledek. A^{C} a B^{C} jsou nezávislé.

Věta 19. Buď $P(B) > 0$. Pak A, B jsou nezávislé, právě když $P(A|B) = P(A)$.

Důkaz. Buďte A, B nezávislé, pak

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A).$$

Nechť $P(A|B) = P(A)$. Potom $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(A)P(B)$. □

Poznámka. 1. Buď A jev, B jev takový, že $P(B) = 0$. Pak A, B jsou nezávislé: $0 \le P(A \cap B) \le P(B) = 0 = P(A)P(B)$.
2. Buď $A \in \mathcal{A}$. Potom A, Ω jsou nezávislé.

Definice 20. Soubor, jehož každé dva prvky jsou nezávislé, nazýváme **párově nezávislý**.

1.5. **Borelovská algebra, borelovsky měřitelné funkce.**

Definice 21. Neprázdný systém $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X se nazývá **algebrou**, pokud platí:

1. $\emptyset \in \mathcal{S}$,
2. $(\forall E, F \in \mathcal{S})(E \setminus F \in \mathcal{S})$,
3. $E \cup F \in \mathcal{S}$.

Definice 22 (alternativní)**.** Neprázdný systém $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X se nazývá **algebrou**, pokud platí:

1. $(\forall E \in \mathcal{S})(X \setminus E \in \mathcal{S})$,
2. $(\forall E, F \in \mathcal{S})(E \cup F \in \mathcal{S})$.

Definice 23. Nechť Z je libovolný systém z 2^X. Definujeme

$$\sigma(Z) = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} \mathcal{S}_\alpha,$$

kde $\mathcal{S}_\alpha$ jsou σ-algebry takové, že $Z \subset \mathcal{S}_\alpha$.

Množina $\sigma(Z)$ se nazývá **mininální σ-algebrou** nad systémem Z.

Definice 24. Buď $X = \mathbb{R}$, $\tau = \{(a_i, b_i) | a_i < b_i \wedge a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$, pak $\sigma(\tau) =: \mathcal{B}_1$ se nazývá **borelovská algebra** a $B \in \mathcal{B}_1$ se nazývá **borelovsky měřitelná**.

Definice 25. Náhodná veličina je funkce $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ taková, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\{\omega | X(\omega) \le x\} \in \mathcal{A}$, $X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{A}$.

Definice 26. Buď $A \in \mathcal{A}$. Potom funkce

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \notin A \\ 1 & \omega \in A \end{cases}$$

je **charakteristická funkce** A.

Poznámka. 1. Funkce $\mathbf{1}_A$ je náhodná veličina.
2. Značení: $\{\omega | X(\omega) \in S\} =: \{X \in S\}$.

Věta 27. Funkce $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ je náhodná veličina, právě když $(\forall x \in \mathbb{R})(\{X < x\} \in \mathcal{A})$.

Důkaz. □

1.6. **Operace s náhodnými veličinami.**

1. Sčítání: $(X + Y)(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$.

   Důkaz, že $X + Y$ je n.v. Dokážeme, že $A = \{\omega | X(\omega) + Y(\omega) < c\} \in \mathcal{A}$ a že

   $$A = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{X(\omega) \leq r\} \cap \{Y(\omega) \leq c - r\}).$$

   (a) $\supset$: triviální.
   (b) $\subset$: Nechť $\omega \in A$. Potom $X(\omega) + Y(\omega) < c \iff X(\omega) < c - Y(\omega)$, takže existuje $r \in \mathbb{Q}$ tak, že platí $X(\omega) \leq r \leq c - Y(\omega)$, tj. $\omega \in \bigcup$.

   □

2. Násobení konstantou: $(KX)(\omega) = K \cdot X(\omega)$.

   Důkaz, že KX je n.v. (a) Pro $K > 0$ je $\{X \leq c/K\} \in \mathcal{A}$.
   (b) Pro $K < 0$ je $\{X \geq c/K\} \in \mathcal{A}$.
   (c) Pro $K = 0$ je $\emptyset \in \mathcal{A}$ pro $x < 0$ nebo $\Omega \in \mathcal{A}$ pro $c \geq 0$.

   □

3. Násobení: $(XY)(\omega) = X(\omega) \cdot Y(\omega)$.

   Důkaz, že XY je n.v. Dokážeme, že X^2 je n.v.:

   $$\{X^2(\omega) \leq c\} = \begin{cases} \emptyset & c < 0 \\ \{-\sqrt{c} \leq X(\omega) \leq \sqrt{c}\} & c \geq 0 \end{cases}$$

   $$\{-\sqrt{c} \leq X(\omega) \leq \sqrt{c}\} = \underbrace{\{X(\omega) \leq \sqrt{c}\}}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{\{\sqrt{c} \leq X(\omega)\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}.$$

   Dále platí, že $XY = \frac{1}{4}((X+Y)^2 - (X-Y)^2)$, což je podle předchozích závěrů náhodná veličina. □

4. Dělení: $Y \neq 0$, $(X/Y)(\omega) = X(\omega)/Y(\omega)$.

   Důkaz, že X/Y je n.v. Buďte X, Y náhodné veličiny, $\{Y(\omega) = 0\} = \emptyset$.

$$\left\{\frac{X(\omega)}{Y(\omega)} \leq c\right\} = \left\{\frac{X(\omega)}{Y(\omega)} \leq c\right\} \cap \{Y > 0\} + \left\{\frac{X(\omega)}{Y(\omega)} \leq c\right\} \cap \{Y < 0\} =$$
$$= \underbrace{\{X(\omega) \leq cY(\omega)\}}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{\{Y(\omega) > 0\}}_{\in \mathcal{A}} + \underbrace{\{X(\omega) \geq cY(\omega)\}}_{\in \mathcal{A}} \cap \underbrace{\{Y(\omega) > 0\}}_{\in \mathcal{A}}$$

   □

5. Maximum: $\max\{X, Y\}(\omega) := \max\{X(\omega), Y(\omega)\}$

   Důkaz, že $\max\{X, Y\}$ je n.v.

   $$\{\max\{X(\omega), Y(\omega)\} \leq c\} = \{X(\omega) \leq c\} \cap \{Y(\omega) \leq c\}.$$

   □

6. Minimum: $\min\{X,Y\} := -\max\{-X,-Y\}$.

Lemma 28. Každou množinu $B \in \mathcal{B}_1$ lze složit z polouzavřených intervalů $(a_i, b_i]$ pomocí operací $\cup$ a $-$.

Věta 29. Buď X náhodná veličina $\Omega \mapsto \mathbb{R}$, g funkce $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ borelovsky měřitelná. Pak $g(X)$ je náhodná veličina.

Důkaz. Z předpokladu vyplývá, že $g^{-1}((-\infty, c]) = B$ je borelovsky měřitelná. Dále platí, že libovolný interval $(a_i, b_i]$ lze zapsat jako $(-\infty, b_i] - (-\infty, a_i]$. Z nich pak lze složit libovolnou borelovskou množinu (bez důkazu):

$$X^{-1}(B) = X^{-1}\left(\overline{\bigcup_i}(a_i, b_i]\right) = \overline{\bigcup_i} X^{-1}(a_i, b_i] = \overline{\bigcup_i}(X^{-1}(-\infty, b_i] - X^{-1}(-\infty, b_i]),$$

kde $\overline{\bigcup}$ je licensia poetica a znamená to kombinaci $\cup$ a $-$. Z toho plyne, že $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. □

Věta 30. Buďte X_i náhodné veličiny (spočetný počet), potom

$$\inf\{X_i | i \in \mathbb{N}\}, \quad \sup\{X_i | i \in \mathbb{N}\}, \quad X = \lim_{i\to\infty} X_i$$

jsou náhodné veličiny.

Věta 31. Pro charakteristickou funkci množiny platí:

1. $\mathbf{1}_A^2 = \mathbf{1}_A$;
2. $\mathbf{1}_\Omega = 1$;
3. $1 - \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{A^C}$;
4. $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$;
5. $\mathbf{1}_{A+B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$;
6. $\mathbf{1}_{A\cup B} = \max(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$.

1.7. Distribuční funkce náhodné veličiny.

Definice 32. Buď X náhodná veličina. Potom definujeme $F_X : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $F_X(x) = P(X \le x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Věta 33. Buď X náhodná veličina, F_X distribuční funkce. Pak

1. $x_1 \le x_2 \implies F_X(x_1) \le F_X(x_2)$;
2. $\lim_{n\to\infty} F_X(x) = 1$;
3. $\lim_{n\to-\infty} F_X(x) = 0$;
4. $F_X(x)$ je zprava spojitá.

Důkaz. 1. $x_1 \le x_2 \implies \{\omega | X \le x_1\} \subset \{X \le x_2\}$; $P\{X \le x_1\} \le P\{X \le x_2\}$.

2.

$$\lim_{n\to\infty} F_X(n) = \lim_{n\to\infty} P(X \le n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{n}\{X \le n\}\right) = P(\Omega) = 1$$

3.

$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = \lim_{n\to\infty} P(X \le -n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{n}\{X \le -n\}\right) = P(\emptyset) = 0$$

4.

$$\lim_{x\to a+} F_X(x) = \lim_{x\to\infty} F_X\left(a + \frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(X \le a + \frac{1}{2^n}\right) =$$
$$= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{X \le a + \frac{1}{2^n}\right\}\right) = P(X \le a) = F_X(a)$$

□

Poznámka.

$$P(X < x) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{X \leq x - \frac{1}{2^n}\right\}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(X \leq x - \frac{1}{2^n}\right) = \\ = \lim_{n\to\infty} F_X\left(x - \frac{1}{2^n}\right) = F_X(x-0)$$

$$P(X = a) = P(\{X \leq a\} - \{X < a\}) = F_X(a) - F_X(a-0) = \begin{cases} 0 & F_X \text{ spoj.} \\ > 0 & F_X \text{ diskr.} \end{cases}$$

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a-0)$$

$$P(X > a) = 1 - F_X(a)$$

Definice 34. Buďte X, Y náhodné veličiny. Definujeme **sdruženou** distribuční funkci $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\})$.

Věta 35. 1. Buďte $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$. Pak $F_{X,Y}(x_1,y_1) \leq F_{X,Y}(x_2,y_2)$.
2. $\lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = F_Y(y)$, $\lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)$;
3. $\lim_{x\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$, $\lim_{y\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$
4. $F_{X,Y}$ je spojitá zprava v každé proměnné.

Důkaz. 1. $\{X \leq x_1\} \cap \{Y \leq y_1\} \subset \{X \leq x_2\} \cap \{Y \leq y_2\}$.
2.

$$\lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = \lim_{n\to\infty} P(\{X \leq n\} \cap \{Y \leq y\}) = \\ = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\{X \leq n\} \cap \{Y \leq y\})\right) = \\ = P\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X \leq n\}\right) \cap \{Y \leq y\}\right) = P(Y \leq y) = F_Y(y)$$

3.

$$\lim_{n\to\infty} P(X < -n, Y \leq y) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{X \leq -n\} \cap \{Y \leq y\}\right) = P(\emptyset) = 0$$

4. Vyplývá z monotonie a věty o spojitosti pravděpodobnosti.

□

Definice 36. Sdruženou distribuční funkci lze definovat i pro n náhodných veličin:

$$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n).$$

Věta 37. 1. Sdružená distribuční funkce je monotonní;
2.

$$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_{n-1},+\infty) = F_{X_1,\dots,X_{n-1}}(x_1,\dots,x_{n-1}),$$

$$F_{X_1,\dots,X_n}(+\infty,\dots,+\infty,x_j,+\infty,\dots,+\infty) = F_{X_j}(x_j);$$

3. $F_{X_1,\dots,X_n}(-\infty,x_2,\dots,x_n) = 0$;
4. $F_{X_1,\dots,X_n}(+\infty,\dots,+\infty) = 1$;
5. $\Delta^n F_{X_1,\dots,X_n} \geq 0$.

Definice 38. Buďte $X_1,\dots,X_n$ náhodné veličiny. Řekneme, že jsou stochasticky nezávislé, pokud pro každé $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ je systém jevů $\{a_i < X_i \leq b_i\}$ nezávislý

Věta 39. Buďte $X_1, \dots, X_m$ náhodné veličiny. Pak $X_1, \dots, X_m$ jsou nezávislé, právě když

$$F_{X_1,\dots,X_m}(x_1, \dots, x_m) = \prod_{j=1}^{m} F_{X_j}(x_j).$$

Důkaz. 1. ($\Rightarrow$) zvolíme $a_i = -\infty$, $b_i = x_i$:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{m} \{-\infty < X_i \le x_i\}\right) = \prod_{i=1}^{m} P(-\infty < X_i \le x_i)$$

2. ($\Leftarrow$) Buď $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$. Potom

$$\begin{aligned} &P(a < X_1 < b_1 \cap a_2 < X_2 \le b_2) = \\ &= F_{X_1,X_2}(b_1, b_2) - F_{X_1,X_2}(a_1, b_2) - F_{X_1,X_2}(b_1, a_2) + F_{X_1,X_2}(a_1, a_2) = \\ &= [F_{X_1}(b_1) - F_{X_1}(a_1)][F_{X_2}(b_2) - F_{X_2}(a_2)] = P(a_1 < X_1 \le b_1)P(a_2 < X_2 \le b_2). \end{aligned}$$

□

2. Diskrétní náhodné veličiny

Definice 40. Náhodná veličina X je diskrétní, právě když $\operatorname{Ran} X$ je nejvýše spočetná množina.

Definice 41. Pro diskrétní náhodnou veličinu definujeme

$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{m: x_m \le x} P(X = x_m) = \sum_{m=1}^{N,\infty} p_m \mathbf{1}_{[x_m, +\infty)}(x)$$

Definice 42. Frekvenční funkce (hustota pravděpodobnosti) je

$$f(x) = \begin{cases} p_m & x = x_m \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}.$$

Poznámka. Platí

$$\sum_{m=1}^{N,\infty} p_m = 1.$$

2.1. Alternativní (Bernoulliho) rozdělení.

Případ, kdy je

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

a $P(X = 0) = 1 - p$, $P(X = 1) = p$.

2.2. Diracovo rozdělení.

$P(X = c) = 1$, $P(X \ne c) = 0$.

2.3. Binomické rozdělení.

Experiment se n-krát opakuje, přičemž pravděpodobnost úspěchu je $P(A) = p$, neúspěchu $P(A^{\mathrm{C}}) = 1 - p$. Počet příznivých jevů při n opakováních je

$$X = \sum_{j=1}^{n} X_j.$$

Pro pravděpodobnost platí

$$
\begin{aligned}
P(X=k) &= P\left(\sum_{\#(i_1,\dots,i_k)} \{X_{i_1}=1,\dots,X_{i_k}=1, X_{i_{k+1}}=0,\dots,X_{i_n}=0\}\right) = \\
&= \sum_{\#(i_1,\dots,i_k)} P(X_{i_1}=1,\dots,X_{i_k}=1, X_{i_{k+1}}=0,\dots,X_{i_n}=0) = \\
&= \binom{n}{k} \prod_{i=1}^{k} P(x_i=1) \prod_{k=1}^{n} P(x_i=0) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.
\end{aligned}
$$

Z binomické věty také plyne, že

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-k)^{n-k} = (p+1-p)^n = 1.$$

2.4. **Geometrické (Pascalovo) rozdělení.** Nekonečná posloupnost alternativních pokusů, $P(A)=p$, $P(A^{\mathrm{C}})=1-p$, X je počet pokusů před prvním výskytem jevu A. Platí, že

$$P(X=k) = p(1-p)^k.$$

Také platí, že

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k = p\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k = p\frac{1}{1-(1-p)} = 1.$$

2.5. **Negativně binomické rozdělení.** Nekonečné opakování, Y je počet neúspěchů před m-tým úspěchem, $P(A)=p$. Potom

$$P(Y=k) = \binom{k+m-1}{k} p^m (1-p)^k.$$

2.6. **Hypergeometrické rozdělení.** Model: zásobník :-), r červených kuliček, $N-r$ bílých, n-krát opakuji (bez vracení). X je počet červených kuliček v n-tici.

$$P(X=x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}.$$

2.7. **Poissonovo rozdělení.**

Definice 43. Náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení s parametrem λ, pokud

$$P(X=x) = \frac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

Věta 44 (Poisson)**.** Nechť $np_n \to \lambda$ (nebo $np_n = \lambda$), $\lambda > 0$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = \frac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

Důkaz.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} P_n(x) &= \lim_{n\to+\infty} \binom{n}{x} p_n^x (1-p_n)^{n-x} = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n} - o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n-x} = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n^x} \left(1+\frac{n}{\lambda} o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^x \\
&\quad \left(1-\frac{\lambda}{n} - o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n} - o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-x} = \frac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda},
\end{aligned}
$$

neboť

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}-o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n=\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

□

Poznámka. 1.

$$\sum_{x=0}^{\infty}P(X=x)=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda}=1$$

2. Poissonovo rozdělení pro velká n a malá p aproximuje $\mathrm{Bi}(n,p)$.

2.7.1. *Zákon řídkých jevů.*

Věta 45. Nechť $0<t_1<t_2$ a nechť dále platí:

1. Počet výskytů jevu A v $[t_1,t_2)$ nezávisí na počtu výskytů v $[0,t_1)$.
2. Pravděpodobnost výskytu jevu A právě jednou v $[t,t+h)$ je $\lambda h+o(h)$ při $h\to 0+$.
3. Pravděpodobnost výskytu jevu A více než jednou v $[t,t+h)$ je $o(h)$.
4. Pravděpodobnost $P_n(t)$ výskytu n jevů do času t je diferencovatelná funkce t pro každé n.

Pak

$$P_n(t)=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}.$$

Číslo λ se nazývá **intenzita Poissonovského procesu**.

Důkaz. Buď X_t počet událostí v časovém intervalu $[0,t)$, $P(X_t=k)=p_k(t)$.

$$p_0(t+h)=P(X_t=0)P(X_{t+h}-X_t=0)=p_0(t)(1-\lambda h+o(h))$$

$$\frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}t}(t)=\lim_{h\to0+}\frac{p_0(t+h)-p_0(t)}{h}=\lim_{h\to0+}\left(-\lambda p_0(t)+p_0(t)\frac{o(h)}{h}\right)=-\lambda p_0(t)$$

$$\begin{aligned}p_k(t+h)&=\sum_{j=0}^{k}P(X_t=j)P(X_{t+h}-X_t=k-j)=\\&=\sum_{j=0}^{k-2}P(X_t=j)o(h)+P(X_t=k-1)(\lambda h+o(h))+\\&\quad+P(X_t=k)(1-\lambda h+o(h))\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}(t)=\lim_{h\to0+}\frac{p_k(t+h)-p_k(t)}{h}=\lambda p_{k-1}(t)-\lambda p_k(t)$$

$$\begin{aligned}p_0'(t)&=-\lambda p_0(t)\\p_k'(t)&=\lambda(p_{k-1}(t)-p_k(t))\\p_0(0)&=1\\p_k(0)&=0\end{aligned}$$

□

3. Vícerozměrná diskrétní rozdělení

$$f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = P\left(\bigcap_{j=1}^{n}\{X_j = x_j\}\right)$$

Definice 46. Buďte $X_1,\dots,X_n$ náhodné veličiny, $1 \le m < n$. Pak podmíněná diskrétní hustota pravděpodobnosti $X_1,\dots,X_m$ při daných $X_m+1,\dots,X_n$ je

$$f_{X_1,\dots,X_m|X_{m+1},\dots,X_n}(x_1,\dots,x_m|x_{m+1},\dots,x_n) = \\ = P\left(\bigcap_{j=1}^{m}\{X_j = x_j\} \middle| \bigcap_{j=m+1}^{n}\{X_j = x_j\}\right)$$

3.1. **Multihypergeometrické rozdělení.** Model: Zásobník, r červených kuliček, b modrých, w bílých. n kuliček vytáhneme, X je počet červených, Y počet bílých.

$$f_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y) = f_{X|Y}(x|y)f_Y(y) = \\ = H(n-w, r, n-y)H(N, w, n) = \frac{\binom{r}{x}\binom{w}{y}\binom{N-r-w}{n-x-y}}{\binom{N}{n}}$$

3.2. **Multinomické rozdělení.** n-krát opakujeme experiment, nezávisle. Sledujeme jevy $A_1,\dots,A_k$, při každém opakování nastane právě jeden z nich. $P(A_k) = p_k$,

$$\sum_{j=1}^{k} p_j = 1.$$

Buď X_j počet jevů A_j při n opakováních. Potom

$$f_{X_1,\dots,X_k}(x_1,\dots,x_k) = P\left(\bigcap_{j=1}^{k}\{X_j = x_j\}\right) = \frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_k!}p_1^{x_1}\cdots p_k^{x_k}.$$

$$\begin{aligned} 0 \le x_1 &\le n, \\ 0 \le x_2 &\le n - x_1 \\ &\vdots \\ 0 \le x_{k-1} &\le n - x_1 - \dots - x_{k-2}, \\ x_k &= n - x_1 - \dots - x_{k-1} \end{aligned}$$

4. Absolutně spojitá rozdělení

Definice 47. Náhodná veličina X má **absolutně spojité rozdělení** (dále jen **ASR**), pokud existuje $f_X : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tak, že

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)\,\mathrm{d}t.$$

Funkci f_X nazýváme **hustota pravděpodobnosti**.

Definice 48. Náhodné veličiny $(X_1,\dots,X_n) = \mathbf{X}$ mají **sdružené absolutně spojité rozdělení** (**SASR**), pokud existuje

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_1.$$

Funkce $f_{\mathbf{X}}$ je **sdružená hustota pro X**.

Poznámka. 1. Někde se místo pojmu „absolutní spojitost“ používá pouze „spojitost“.

2. Funkce F je absolutně spojitá, právě když existuje funkce f definovaná skoro všude tak, že
$$F = \int_{-\infty}^{x} f(t)$$
a $F'_X(x_0) = f_X(x_0)$

Definice 49. Funkce F je absolutně spojitá na (a, b), právě když pro každé ε existuje δ tak, že $\forall\{(a_i, b_i) \subset (a, b)\}$
$$\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \delta \implies \sum_{i=1}^{\infty} |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon.$$

3. Je-li F riemannovsky integrabilní a spojitá v x_0, pak $F'(x_0) = f(x_0)$.

Věta 50. Je-li funkce $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ riemannovsky integrabilní a spojitá v $\mathbf{x}_0$, pak
$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}.$$

Věta 51 (Lebesgueova pro distribuční funkce)**.** Libovolnou distribuční funkci lze zapsat jako
$$F(x) = F_1(x) + K(x) + S(x),$$
kde F_1 je absolutně spojitá, K je s nejvýše spočetně skoky, S je spojitá a rostoucí pouze na množině míry 0.

Poznámka. Vlastnosti distribuční funkce:

1. $f_{\mathbf{X}} \geq 0$ skoro všude.
2. $$\int_{\mathbb{R}} f_{\mathbf{X}}(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$
3. $$P(a < \mathbf{X} \leq b) = \int_{a}^{b} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. 1. Vyplývá z monotonie F_X.

2. $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X = \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{x} f_X = \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$$
3. $$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f - \int_{-\infty}^{a} f$$

$$\begin{aligned}
&P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) = \\
&= F_{X,Y}(b_1, b_2) - F_{X,Y}(a_1, b_2) - F_{X,Y}(b_1, a_2) + F_{X,Y}(a_1, a_2) = \\
&= \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f_X(u, v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

□

Věta 52. Nechť (X_1, X_2, X_3) mají SASR. Pak (X_1, X_3) mají SASR a platí

$$f_{X_1,X_3}(x_1,x_3) = \int_{-\infty}^{-\infty} f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)\,\mathrm{d}x_2.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} F_{X_1,X_3}(x_1,x_3) &= \lim_{x_2\to+\infty} F(x_1,x_2,x_3) = \\ &= \lim_{x_2\to+\infty} \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\int_{-\infty}^{x_3} f_{X_1,X_2,X_3}(t_1,t_2,t_3)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_3 = \\ &= \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_3}\left(\lim_{x_2\to+\infty}\int_{-\infty}^{x_2} f_{X_1,X_2,X_3}(t_1,t_2,t_3)\,\mathrm{d}t_2\right)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_3, \end{aligned}$$

tedy

$$f_{X_1,X_3}(x_1,x_3) = \int_{-\infty}^{-\infty} f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3).$$

□

Věta 53. Nechť náhodné veličiny $(X_1,\dots,X_n)$ mají SASR. Pak $(X_1,\dots,X_n)$ jsou nezávislé, právě když

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(\alpha_i).$$

Důkaz. 1. $(\Leftarrow)$

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= \int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathbf{X}} = \int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(t_i)\,\mathrm{d}t_i = \\ &= \prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{x_i} f_{X_i}(t_i)\,\mathrm{d}t_i = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i). \end{aligned}$$

2. $(\Rightarrow)$

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{x_i} f_{X_i}(t_i)\,\mathrm{d}t_i = \int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(t_i)\,\mathrm{d}t_i.$$

□

Definice 54. Buďte X, Y náhodné veličiny, $y_0 \in \operatorname{Ran} Y$. Podmíněná distribuční funkce náhodné veličiny X za podmínky $Y = y_0$ je funkce $F_{X|Y} : \mathbb{R} \mapsto [0,1]$ definovaná předpisem

$$F_{X|Y}(x|y_0) = \lim_{\varepsilon\to 0+} P(\{X \le x\}|\{y_0 - \varepsilon < Y \le y_0 + \varepsilon\}).$$

Definice 55. Podmíněná hustota pravděpodobnosti za $Y = y_0$ je taková funkce $f_{X|Y}$, že platí

$$F_{X|Y}(x|y_0) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(t|y_0)\,\mathrm{d}t.$$

Lemma 56. Nechť X má ASR a f_X je spojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f_X(t)\,\mathrm{d}t = f_X(x_0).$$

Důkaz.

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{2\varepsilon}(F_X(x_0+\varepsilon) - F_X(x_0-\varepsilon) + F_X(x_0) - F_X(x_0)) =$$
$$= \frac{1}{2}({F_x}'_+(x_0) + {F_x}'_-(x_0)) = f_X(x_0).$$

□

Věta 57. Nechť X, Y jsou náhodné veličiny se SASR. Nechť $y_0 \in \mathbb{R}$ takové, že

1. $f_{X,Y}$ je spojitá v y_0 pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}$,
2. $f_Y(y)$ je spojitá v y_0 a $f_Y(y_0) > 0$.

Pak

$$f_{X|Y}(x|y_0) = \frac{f_{X,Y}(x,y_0)}{f_Y(y_0)}$$

pro skoro každé $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz.

$$\begin{aligned}
F_{X|Y}(x|y_0) &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{P(\{X \le x\} \cap \{y_0 - \varepsilon < Y \le y_0 + \varepsilon\})}{P(y_0 - \varepsilon < Y \le y_0 + \varepsilon)} = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}t \int_{y_0-\varepsilon}^{y_0+\varepsilon} \mathrm{d}y f_{X,Y}(t,y)}{\int_{y_0-\varepsilon}^{y_0+\varepsilon} f_Y(y)\,\mathrm{d}y} = \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{x} \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-y_0-\varepsilon}^{y_0+\varepsilon} f_{X,Y}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{y_0-\varepsilon}^{y_0+\varepsilon} f_Y(y)\,\mathrm{d}y} = \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(t,y_0)\,\mathrm{d}t}{f_Y(y_0)} = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{f_{X,Y}(t,y_0)}{f_Y(y_0)}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

□

5. Funkce náhodných veličin

Lemma 58. Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ tak, že $\{\omega | (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in S\} \in \mathcal{A}$. Pak

$$P((x_1, \dots, x_n) \in S) = \int \cdots \int\limits_S f_{X_1,\dots,X_n}(\mathbf{t})\,\mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_n.$$

Věta 59. Nechť $\mathbf{X}$ má SASR, $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ je regulární a prosté zobrazení na otevřené množině G takové, že $\int_G f_{\mathbf{X}} = 1$. Označme $\mathbf{Y} = g(\mathbf{X})$. Pak $\mathbf{Y}$ má SASR, $P(\mathbf{X} \in G) = 1$ a platí

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = f_{\mathbf{X}}(g^{-1}(\mathbf{y})) \left|\mathcal{J}_{g^{-1}}(\mathbf{y})\right|.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}
F_{\mathbf{Y}}(v_1, v_2, \dots, v_n) &= P(Y_1 \le v_1, \dots, Y_n \le v_n) = \\
&= P(g_1(\mathbf{X}) \le v_1, \dots, g_n(\mathbf{X}) \le v_n) = \\
&= P(\mathbf{X} \in S) = \int \cdots \int\limits_S f_{X_1,\dots,X_n}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \\
&= \int\limits_{-\infty}^{v_1} \cdots \int\limits_{-\infty}^{v_n} f_{\mathbf{X}}(g^{-1}(\mathbf{y})) \left|\mathcal{J}_{g^{-1}}(\mathbf{y})\right| \mathrm{d}\mathbf{y},
\end{aligned}$$

kde $S = \{\mathbf{x} | (\forall j)(g_j(\mathbf{x}) \leq v_j)\}$. □

Věta 60. Buďte (X, Y) nezávislé n. v. se SASR $f_{X,Y}$, $Z = (X + Y)$. Pak

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Definujeme transformaci $x = v$, $y = z - v$. Potom $|\mathcal{J}| = 1$, $f_{V,Z}(v,z) = f_{X,Y}(z, z - v)$,

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(v, z - v)\,\mathrm{d}v = \int_{\mathbb{R}} f_X(v) f_Y(z - v)\,\mathrm{d}v.$$

□

Věta 61. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé se SASR. Pak $X_1 + \cdots + X_{r_1}$, $X_{r_1+1} + \cdots + X_{r_2}$, … ,$X_{r_k+1} + \cdots + X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny.

Důkaz.

$$\begin{aligned} \varphi \equiv u_1 &= x_1 + \cdots + x_{r_1} \\ u_2 &= x_2 \\ &\vdots \\ u_{r_1} &= x_{r_1} \end{aligned}$$

$\varphi : \mathbb{R}^{r_1} \mapsto \mathbb{R}^{r_1}$, $\left|\mathcal{J}_{\varphi^{-1}}\right| = 1$,

$$f_{U_1,\ldots,U_{r_1}} = 1 \cdot f_{X_1,\ldots,X_{r_1}}(u_1 - u_2 - \cdots - u_{r_1}, u_2, \ldots, u_{r_1})$$

$$\begin{aligned} f_{U_1}(u_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1,\ldots,X_{r_1}}(u_1 - u_2 - \cdots - u_{r_1}, u_2, \ldots, u_{r_1})\,\mathrm{d}u_2 \cdots \mathrm{d}u_{r_1} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(u_1 - u_2 - \cdots - u_{r_1}) \prod_{j=2}^{r_1} f_{X_j}(u_j)\,\mathrm{d}u_2 \cdots \mathrm{d}u_{r_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi \equiv u_{r_1+1} &= x_{r_1+1} + \cdots + x_n \\ u_{r_1+2} &= x_{r_1+2} \\ &\vdots \\ u_{r_n} &= x_{r_n} \end{aligned}$$

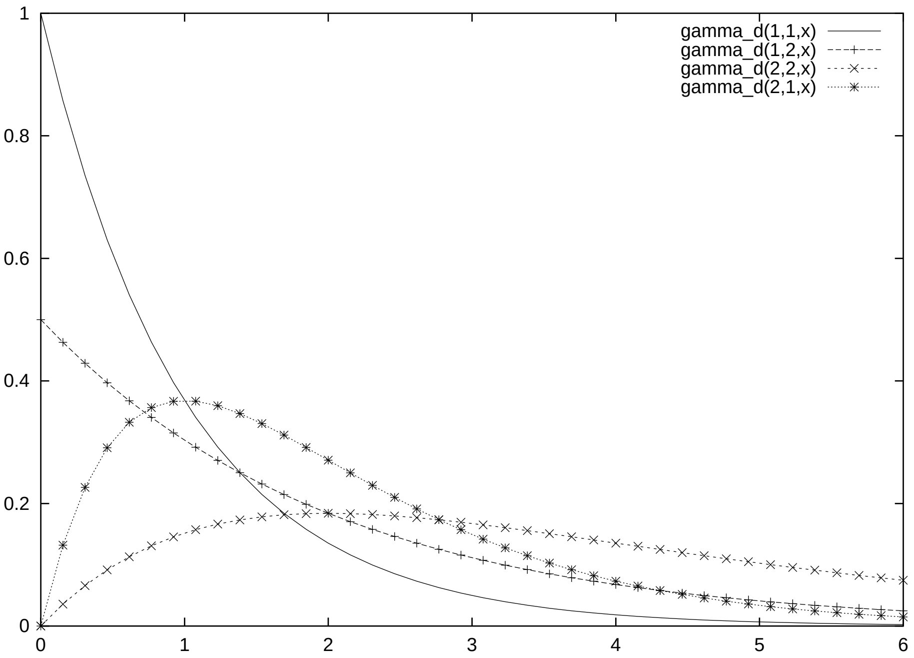
Analogicky dokážeme, že

$$\begin{aligned} &f_{U_{r_1+1}}(u_{r_1+1}) = \\ &= \int \cdots \int f_{X_{r_1+1},\ldots,X_{r_n}}(u_{r_1+1} - u_{r_1+2} - \cdots - u_n, u_{r_1+2}, \ldots, u_n)\,\mathrm{d}u_{r_1+2} \cdots \mathrm{d}u_n \end{aligned}$$

Ze zobrazení φ a ψ vytvoříme zobrazení $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, to má rovněž $|\mathcal{J}| = 1$, takže

$$\begin{aligned} f_{U_1,\ldots,U_n} = 1 \cdot f_{X_1,\ldots,X_n}(&u_1 - u_2 - \cdots - u_{r_1}, u_2, \ldots, u_{r_1}, \\ &u_{r_1+1} - u_{r_1+2} - \cdots - u_n, u_{r_1+2}, \ldots, u_n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{U_1,U_{r_1+1}} &= \iint f_{\mathbf{X}}(\cdots)\,\mathrm{d}u_2 \cdots \mathrm{d}u_{r_1} \mathrm{d}u_{r_1+2} \cdots \mathrm{d}u_n = \\ &= \int f_{X_1,\ldots,X_{r_1}}(\cdots)\,\mathrm{d}u_2 \cdots \mathrm{d}u_{r_1} \int f_{X_{r_1+1},\ldots,X_n}(\cdots)\,\mathrm{d}u_{r_1+2} \cdots \mathrm{d}u_n = \\ &= f_{U_1}(u_1) f_{U_{r_1+1}}(u_{r_1+1}). \end{aligned}$$



Obrázek 1. Hustota pravděpodobnosti při gama-rozdělení

□

6. Příklady absolutně spojitých rozdělení

6.1. **Gama rozdělení.** Značíme $G(\alpha,\beta)$.

$$f_X(x) = \frac{1}{\mathbf{\Gamma}(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x/\beta}, \quad x>0, \alpha>0, \beta>0.$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathbf{\Gamma}(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1.$$

6.2. **Beta rozdělení.** Značíme $B(p,q)$,

$$f_X(x) = \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{\mathbf{B}(p,q)}, \quad 0<x<1, p>0, q>0.$$

6.3. **Rovnoměrné rozdělení.** Značíme U_G, $G\subset\mathbb{R}^n$,

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{\mu G} & x\in G \\ 0 & \text{jinde.}\end{cases}$$

6.4. **Exponenciální rozdělení.** Značíme $\mathrm{Exp}(\alpha,\mu)$, $\mu\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$,

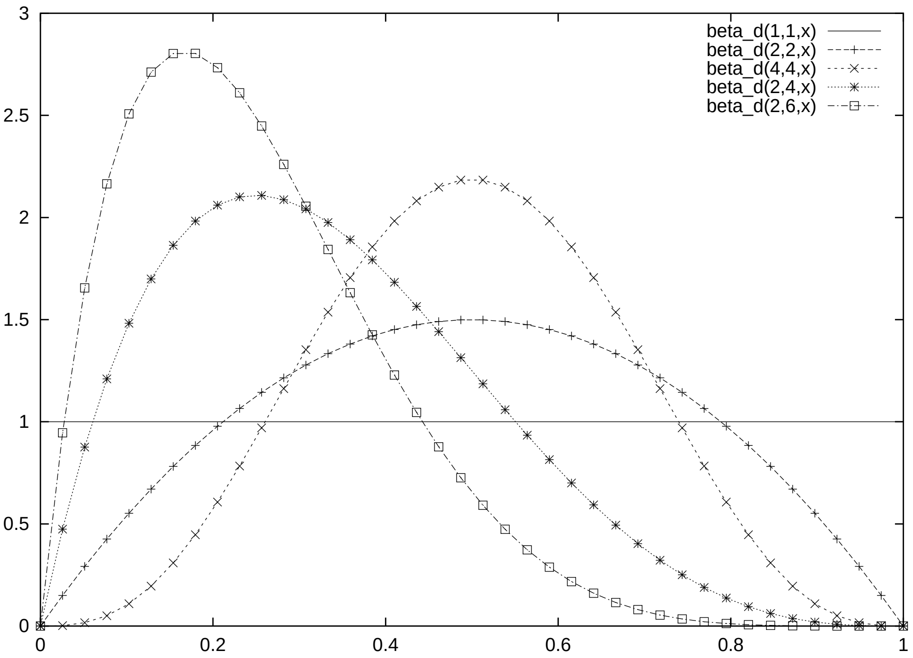
$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha\mathrm{e}^{-\alpha(x-\mu)} & x>\mu \\ 0 & \text{jinak.}\end{cases}$$

Pro distribuční funkci platí

$$F_X(x) = 1-\mathrm{e}^{-\alpha(x-\mu)}.$$

Alternativní definice: $\alpha = 1/\theta$, $\mu=0$,

$$\mathrm{Exp}(\theta) = \frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}.$$



Obrázek 2. Hustota pravděpodobnosti při beta-rozdělení

Věta 62. Buďte $X_1, \ldots, X_n$ nezávislé a identicky distribuované podle $\mathrm{Exp}(\alpha, 0)$. Pak $X_1 + \cdots + X_n \sim G(n, \frac{1}{\alpha})$.

Důkaz.

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{n} f_{X_j}(x_j) = \begin{cases} \alpha^n \mathrm{e}^{-\alpha \sum_{j=1}^{n} x_j} & \min_{j \in \widehat{n}}(x_j) > 0 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

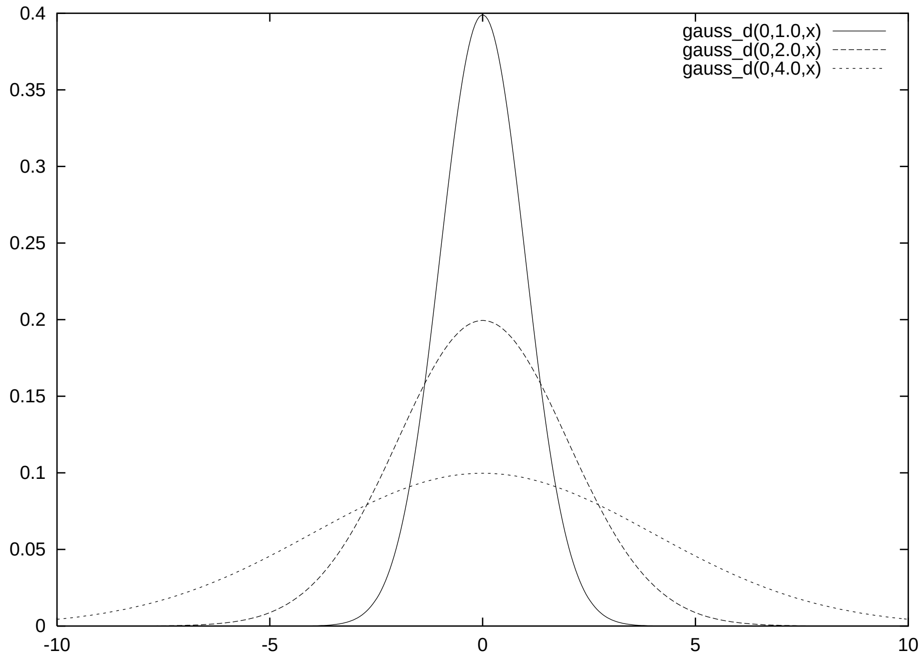
$$Y = \sum_{j=1}^{n} X_j,$$

definujeme zobrazení

$$\begin{aligned} \varphi \equiv u_1 &= x_1 + \cdots + x_n \\ u_2 &= x_2 \\ &\vdots \\ u_n &= x_n \end{aligned}$$

$$\left|\mathcal{J}_{\varphi^{-1}}\right| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \ldots & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$f_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}) = \begin{cases} 1 \cdot \alpha^n \mathrm{e}^{-\alpha u_1} & u_j > 0,\ u_1 - \cdots - u_n > 0 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$



Obrázek 3. Hustota pravděpodobnosti při normálním rozdělení

$$f_{U_1}(u_1) = \int\limits_{\substack{u_j>0\\ u_1-\cdots-u_n>0}} \cdots \int \alpha^n \mathrm{e}^{-\alpha u_1}\, \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3 \cdots \mathrm{d}u_n =$$
$$= \alpha^n \mathrm{e}^{-\alpha u_1} \int\limits_{\substack{u_j>0\\ u_1-\cdots-u_n>0}} \cdots \int 1\, \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3 \cdots \mathrm{d}u_n = \frac{\alpha^n}{(n-1)!} u_1^{n-1} \mathrm{e}^{-\alpha u_1}$$

□

6.5. **Normální (Gaussovo) rozdělení.** Značíme $N(\mu, \sigma^2)$,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right), \quad x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

Dále zavádíme

$$N(0,1) \equiv \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad \Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, \mathrm{d}t.$$

Poznámka. 1. Je-li $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, potom

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \quad f_X(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{x_1}^{x_2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right) = F_X(x_2) - F_X(x_1) =$$
$$= \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$$

2. Pravidla 1σ, 2σ, 3σ:

$$P(\mu - \sigma < X \le \mu + \sigma) = P\left(-1 < \frac{x-\mu}{\sigma} \le 1\right) = \Phi(1) - \Phi(-1)$$

3. Buď $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = aX + b$. Potom

$$|\mathcal{J}| = \frac{1}{|a|},$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(\frac{-\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(y-(b+\mu a))^2}{2a^2\sigma^2}\right) \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$$

4. Pokud položíme $a = 1/\sigma$, $b = -\mu/\sigma$, dostáváme

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1).$$

Věta 63. Buďte $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ nezávislé. Potom $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

Důkaz.

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(y-x) f_{X_2}(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}(y-x-\mu_1)^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}(x-\mu_2)^2\right)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\exp\left(-\frac{1}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}(y-\mu_1-\mu_2)^2\right).$$

□

Poznámka. Indukcí to lze rozšířit na libovolný konečný počet náhodných veličin:

$$Y = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k \sim N\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\mu_k, \sum_{k=1}^{n} a_k^2\sigma_k^2\right).$$

Důsledek. Buďte X_k iid podle $N(\mu, \sigma^2)$. Potom

$$Y = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right),$$

tj. s rostoucím počtem veličin klesá rozptyl průměru.

6.6. **Rozdělení χ^2 (Pearsonovo).** Buďte $X_1, \dots, X_n$ iid $N(0,1)$. Potom definujeme rozdělení χ^2 jako

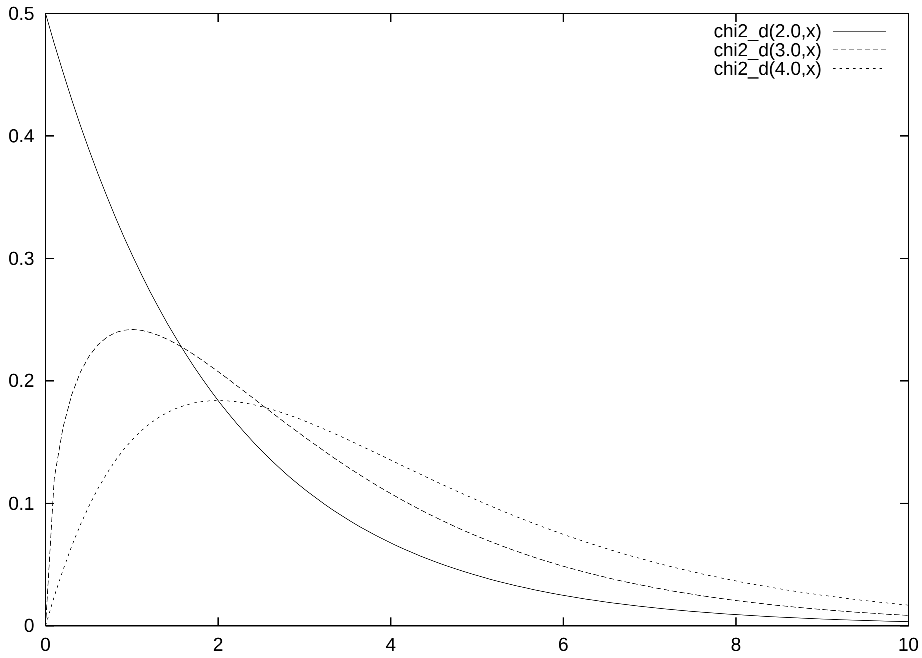
$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n).$$

Odvození: Protože X_j jsou nezávislé, je

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{n} N(0,1) = (2\pi)^{-n/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} X_j^2\right).$$

Použijeme transformaci

$$\begin{aligned}
x_1 &= \varrho\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cdots\cos\varphi_{n-1}\\
x_2 &= \varrho\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-1}\\
&\vdots\\
x_n &= \varrho\sin\varphi_1
\end{aligned}$$



Obrázek 4. Hustota pravděpodobnosti při rozdělení χ^2

Jakobián transformace má tvar $|\mathcal{J}| = \varrho^{n-1} D(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, definiční obor je $\varphi_{n-1} \in (0, 2\pi)$, $\varphi_j \in (0, \pi)$ pro $j \in \widehat{n-2}$, $\varrho > 0$. Potom platí

$$f_{\varrho,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}}(\cdots) = (2\pi)^{-n/2} \mathrm{e}^{-\varrho^2/2} \varrho^{n-1} D(\varphi_1, \dots, \varphi_n).$$

$$\begin{aligned} f_\varrho(\varrho) &= (2\pi)^{-n/2} \varrho^{n-1} \mathrm{e}^{-\varrho^2/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} D(\varphi_1, \dots, \varphi_n)\, \mathrm{d}\varphi_1, \cdots \mathrm{d}\varphi_{n-1} = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \varrho^{n-1} \mathrm{e}^{-\varrho^2/2} \int_{B(0,1)} 1\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n. \end{aligned}$$

Po normování dostaneme

$$f_\varrho(\varrho) = \frac{1}{\boldsymbol{\Gamma}\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}-1}} \varrho^{n-1} \mathrm{e}^{-\varrho^2/2}.$$

Protože $X = \varrho^2$, je

$$f_X(x) = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.$$

Také platí, že $\chi^2(n) = G(n/2, 2)$.

Věta 64. Buďte $Y_1, \dots, Y_m \sim \chi^2(n_i)$, nezávislé. Potom

$$\sum_{i=1}^m Y_i \sim \chi^2\left(\sum_{i=1}^m n_i\right).$$

Důkaz. Platí, že

$$\begin{aligned}
f_{Y_1+Y_2} &= \int\limits_0^u f_{Y_1}(u-v) f_{Y_2}(v)\,\mathrm{d}v = \\
&= \frac{1}{4\boldsymbol{\Gamma}\left(\frac{n_1}{2}\right)\boldsymbol{\Gamma}\left(\frac{n_2}{2}\right)} \exp\left(-\frac{u}{2}\right) \int\limits_0^u \left(\frac{u-v}{2}\right)^{\frac{n_1}{2}-1} \left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{n_2}{2}-1} \mathrm{d}v = \\
&= \frac{1}{4\boldsymbol{\Gamma}\left(\frac{n_1}{2}\right)\boldsymbol{\Gamma}\left(\frac{n_2}{2}\right)} 2 \left(\frac{u}{2}\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}-1} \mathbf{B}\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right) = \\
&= \frac{1}{2\boldsymbol{\Gamma}\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)} \left(\frac{u}{2}\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}-1} \exp\left(-\frac{u}{2}\right).
\end{aligned}$$

□

6.7. **Studentovo rozdělení.** Značíme $t(n)$. X, Y jsou nezávislé, $X \sim N(0,1)$, $Y \sim \chi^2(n)$,

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n).$$

$$f_T(t) = \frac{1}{\mathbf{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} n^{n/2} (n+t^2)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

6.8. **Fisherovo rozdělení.** Značíme $F_{n,m}$. Buďte X, Y nezávislé, $X \sim \chi^2(n)$, $Y \sim \chi^2(m)$,

$$U \sim \frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}} \sim F_{n,m}.$$

$$f_U(u) = \frac{1}{\mathbf{B}\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} u^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n}u\right)^{-\frac{m+n}{2}}$$

6.9. **Exponenciální třída hustot.** $h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^s$, $g : \mathbb{R}^s \mapsto \mathbb{R}^s$, $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^s$.

$$f_{\mathbf{X}} = h(\mathbf{x}) c(\Theta) \operatorname{Exp}(g(\Theta) T(\mathbf{x}))$$

$$\operatorname{Exp}(\theta) = \frac{1}{\theta} \exp\left(\frac{-x}{\theta}\right)$$

6.10. **Weibullovo rozdělení.**

$$F_X(x) = 1 - \exp\left(-\frac{(x-\mu)^\beta}{c}\right)$$

7. Charakteristiky náhodných veličin

Definice 65. Pro diskrétní náhodnou veličinu $X \sim (x_k, p_k)$ definujeme **střední hodnotu** X jako

$$EX = \sum_{k=1}^n x_k p_k$$

za předpokladu, že suma konverguje.

Střední hodnotu absolutně spojité náhodné veličiny definujeme jako

$$EX = \int\limits_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

opět za předpokladu, že integrál konverguje.

Definice 66. Buď $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$. Potom $E\mathbf{X} = (EX_1, \dots, EX_n)$.

Věta 67. Buďte $\mathbf{X}$, $Y = g(\mathbf{X})$, $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ borelovsky měřitelná a prostá. Pak

$$Eg(\mathbf{X}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

za předpokladu, že

$$\int\limits_{R^n} g f_{\mathbf{X}} \, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

absolutně konverguje.

Důkaz. Funkci $Y = g(\mathbf{X})$ doplníme na transformaci $\tilde{g} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ tak, aby byla regulární, prostá a $\tilde{g}_1(\mathbf{X}) = g(\mathbf{X})$.

$$EY = \int\limits_{\mathbb{R}} y_1 f_{Y_1} \, \mathrm{d}y_1 = \int\limits_{\mathbb{R}} y_1 \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) \, \mathrm{d}y_2 \cdots \mathrm{d}y_n \right) \mathrm{d}y_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} y_1 f_{\mathbf{Y}} =$$
$$= \int\limits_{\tilde{g}^{-1}(\mathbb{R}^n)} g(\mathbf{x}) f_{\mathbf{Y}}(\tilde{g}(\mathbf{x})) \, |\mathcal{J}_{\tilde{g}}| \, \mathrm{d}\mathbf{x} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathbf{x}$$

□

Věta 68. Buď X diskrétní náhodná veličina (x_k, p_k), $Y = g(X)$ borelovsky měřitelná, $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Pak

$$Eg(X) = \sum_{k=1}^{n} g(x_k) p_k$$

za předpokladu, že

$$\sum_{k=1}^{n} g(x_k) p_k$$

absolutně konverguje.

Důkaz. Nechť y_k odpovídá pravděpodobnost q_k. Potom

$$EY = \sum_{k=1}^{n} y_k q_k = \sum_{k=1}^{n} y_k P(Y = y_k) = \sum_{k=1}^{n} y_k P(g(X) = y_k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} y_k \sum_{\substack{j \\ g(x_j) = y_k}} p_j = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j \\ g(x_j) = y_k}} y_k p_j = \sum_{j=1}^{n} y_j p_j .$$

□

Věta 69. Střední hodnota n.v. má následující vlastnosti:

1. $E(c) = c$;
2. $E(\alpha X + \beta) = \alpha EX + \beta$;
3. $$E\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \sum_{j=1}^{n} EX_j;$$
4. $$E\left(\prod_{j=1}^{n} X_j\right) = \prod_{j=1}^{n} E(X_j)$$
   za předpokladu, že $\{X_j\}$ nezávislé.

Důkaz. 1.

$$E(\alpha X+\beta)=\int_{\mathbb{R}}(\alpha x+\beta)f_X\,\mathrm{d}x=\alpha\int_{\mathbb{R}}xf_X\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}}\beta f_X\,\mathrm{d}x=\alpha EX+\beta.$$

2. Viz výše.
3.

$$\begin{aligned}E\left(\sum_{j=1}^n X_j\right)&=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}=\\&=\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{R}}x_j\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{j-1}\mathrm{d}x_{j+1}\mathrm{d}x_n\right)\mathrm{d}x_j=\\&=\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{R}}x_jf_{X_j}(x_j)\,\mathrm{d}x_j=\sum_{j=1}^n EX_j.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}E\left(\prod_{j=1}^n X_j\right)&=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\prod_{j=1}^n x_j\right)f_{\mathbf{X}}\,\mathrm{d}\mathbf{x}=\\&=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\prod_{j=1}^n x_j\right)\left(\prod_{j=1}^n f_{X_j}\right)\mathrm{d}\mathbf{x}=\prod_{j=1}^n\int_{\mathbb{R}}x_jf_{X_j}\,\mathrm{d}x_j=\prod_{j=1}^n EX_j.\end{aligned}$$

□

Definice 70. Buď X náhodná veličina, $r\in\mathbb{N}$. Definujeme r-tý obecný moment X jako

$$\mu_r'(X)=E(X^r)$$

a r-tý centrální moment X jako

$$\mu_r(X)=E[(X-EX)^r].$$

Speciálně pro $r=2$

$$DX=\mu_2(X)=E(X-EX)^2=\int_{\mathbb{R}}(x-EX)^2f_X\,\mathrm{d}x,$$

resp.

$$DX=\mu_2(X)=E(X-EX)^2=\sum_k(x_k-EX)^2p_k.$$

Věta 71. Rozptyl náhodné veličiny má následující vlastnosti:

1. $Dc=0$;
2. $DX\geq 0$;
3. $DX=EX^2-(EX)^2$;
4. $EX^2\geq(EX)^2$;
5. $D(\alpha X)=\alpha^2DX$;
6. Jsou-li X_j nezávislé, pak

$$D\left(\sum_{j=1}^n X_j\right)=\sum_{j=1}^n DX_j.$$

Důkaz. 1. Zřejmé.

2. Zřejmé.
3. $DX=E(X^2-2X(EX)+(EX)^2)=EX^2-2EX\,EX+(EX)^2=EX^2-(EX)^2$.

4. Vyplývá z 2 a 3.
5.

$$D(\alpha X) = \int_R (\alpha X - \alpha EX)^2 f_X = \alpha^2 DX.$$

6.

$$\begin{aligned} D\left(\sum_{j=1}^n X_j\right) &= E\left(\sum_{j=1}^n X_j - E\left(\sum_{j=1}^n X_j\right)\right)^2 = E\left(\sum_{j=1}^n (X_j - EX_j)\right)^2 = \\ &= E\left(\sum_{j=1}^n (X_j - EX_j)^2 + \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}}^n (X_i - EX_i)(X_j - EX_j)\right) = \\ &= \sum_{j=1}^n E(X_j - EX_j)^2 + \sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}}^n E(X_i - EX_i)E(X_j - EX_j) = \\ &= \sum_{j=1}^n DX_j. \end{aligned}$$

□

Definice 72. Buď X náhodná veličina, $EX^2 < +\infty$. Potom definujeme **směrodatnou odchylku** veličiny X jako $\sqrt{DX}$.

Definice 73. Buď X náhodná veličina, $EX^2 < +\infty$. Definujeme **standardizovanou náhodnou veličinu** U jako

$$U = \frac{X - EX}{\sqrt{DX}}.$$

Poznámka. Pro standardizovanou náhodnou veličinu platí $EU = 0$, $DU = 1$.

Definice 74. Šikmost (koeficient šikmosti) náhodné veličiny X je

$$\mu_3(U) = \frac{\mu_3(X)}{[\sigma(X)]^3}.$$

Definice 75. Špičatost náhodné veličiny X je

$$\mu_4(U) = \frac{\mu_4(X)}{[\sigma(X)]^4}.$$

Definice 76. Buď X náhodná veličina. Definujeme **momentovou vytvořující funkci**

$$m_{\mathbf{X}}(\mathbf{z}) = E(\mathrm{e}^{\mathbf{zX}}) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathbf{zx}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Věta 77. Momentová vytvořující funkce má následující vlastnosti:

1. $m'_X(z) = E(X\mathrm{e}^{zX})$,

$$\lim_{z\to 0} m'_X = EX.$$

2. Buď $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ borelovsky měřitelná funkce, $Y = g(X)$, potom

$$m_Y(z) = E\left[\mathrm{e}^{zg(X)}\right].$$

3. Momentová vytvořující funkce veličiny X je jednoznačně určena rozdělením X a naopak.

4. Buďte $(X_j)_1^n$ nezávislé, potom

$$m_{\mathbf{X}}(\mathbf{z}) = \prod_{j=1}^{n} m_{X_j}(z_j).$$

5. Buďte $(X_j)_1^n$ nezávislé, $Y = X_1 + \cdots + X_n$, potom

$$m_Y(z) = \prod_{j=1}^{n} m_{X_j}(z).$$

Důkaz. 1. Triviální.
2. Triviální.
3. Netriviální.
4.

$$\begin{aligned} m_{\mathbf{X}}(\mathbf{z}) &= E\left(\exp\left(\sum_{j=1}^{n} z_j X_j\right)\right) = E\left(\prod_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{z_j X_j}\right) = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{1}^{n} \mathrm{e}^{z_j x_j}\right) \prod_{j=1}^{n} f_{X_j}(x_j)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \prod_{j=1}^{n} E\left(\mathrm{e}^{z_j X_j}\right) = \prod_{j=1}^{n} m_{X_j}(z_j) \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} m_Y(z) &= E\left(\exp\left(\sum_{j=1}^{n} z\ X_j\right)\right) = E\left(\prod_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{z X_j}\right) = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{1}^{n} \mathrm{e}^{z x_j}\right) \prod_{j=1}^{n} f_{X_j}(x_j)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \prod_{j=1}^{n} E\left(\mathrm{e}^{z X_j}\right) = \prod_{j=1}^{n} m_{X_j}(z) \end{aligned}$$

□

Příklad. 1. Pro binomické rozdělení $\mathrm{Bi}(n,p)$ platí:

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k} = \\ &= np\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} = np(p+1-p) = np. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DX &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} - n^2p^2 = \\ &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + np - n^2p^2 = \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^{k-2}(1-p)^{n-k} + np - n^2p^2 = \\ &= (p+1-p)^{n-2} n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = -np^2 + np = np(1-p). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_X(z) &= E\left(\mathrm{e}^{zX}\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{zk}\binom{n}{k} p^k (1-p)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\mathrm{e}^z p\right)^k (1-p)^{n-k} = \left(\mathrm{e}^z p + 1 - p\right)^n. \end{aligned}$$

2. Gaussovo rozdělení:

$$EX = \int_{\mathbb{R}} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right) \, \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma y + \mu) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \, \mathrm{d}y = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \, \mathrm{d}y = \mu.$$

$$DX = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right) \, \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma^2 \int_{\mathbb{R}} y^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \, \mathrm{d}y = \sigma^2.$$

$$m_X(z) = E(\mathrm{e}^{zX}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{zx} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right) \, \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{z(\sigma y+\mu)} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \, \mathrm{d}y =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(z\mu + \frac{\sigma^2 z^2}{2}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}(y-\sigma z)^2\right) \, \mathrm{d}y =$$
$$= \exp\left(z\mu + \frac{\sigma^2 z^2}{2}\right).$$

3. Rozdělení Gamma(α, β):

$$m_X(z) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{zx} \frac{1}{\mathbf{\Gamma}(\alpha)} \frac{1}{\beta^\alpha} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) x^{\alpha-1} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\mathbf{\Gamma}(\alpha)} \frac{1}{\beta^\alpha} \frac{1}{\left(\frac{1}{\beta}-z\right)^\alpha} \int_{\mathbb{R}} t^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-t} =$$
$$= \frac{1}{\beta^\alpha} \frac{1}{\left(\frac{1}{\beta}-z\right)^\alpha} = (1-\beta z)^{-\alpha}.$$

$EX = \alpha\beta$, $DX = \alpha\beta^2$.

4. Buďte $X_j \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$ nezávislé,

$$y = \sum_{j=1}^n a_j X_j.$$

Potom

$$m_Y(z) = \prod_{j=1}^n m_{a_j X_j}(z) = \prod_{j=1}^n \exp\left(z a_j \mu_j + \frac{z^2}{2} a_j^2 \sigma_j^2\right) =$$
$$= \exp\left(z\left(\sum_{j=1}^n a_j \mu_j\right) + \frac{z^2}{2}\left(\sum_{j=1}^n a_j \sigma_j^2\right)\right)$$

5. Buďte $X_j \sim N(0,1)$. Potom

$$f_{X_j^2}(y_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y_j^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{y_j}{2}},$$

$$m_{X_j^2}(z_j) = E(\mathrm{e}^{z_j Y_j}) = (1-2z_j)^{-\frac{1}{2}}.$$

Pro $Y = \sum X_j^2$ pak platí

$$m_Y(z) = \prod_{j=1}^n m_{X_j^2}(z) = (1-2z)^{-\frac{n}{2}}.$$

Definice 78. Veličina $x_p = \inf\{x|F_X(x) \geq p\}$, kde $p \in (0,1)$, se nazývá p**-kvantil**. Kvantil $x_{0.5}$ se nazývá **medián**.

Poznámka. 1. Je-li F_X spojitá, pak je $F_X(x_p) = p$ pro každé $p \in (0,1)$.
2.

$$F_X(x_p) = \int_{-\infty}^{x_p} f_X = p.$$

3. Pro rozdělení symetrická podle nuly platí $x_p = x_{1-p}$.

Definice 79. Bod x_m, kde rozdělení nabývá maxima, se nazývá **mód**.

8. Charakteristiky vícerozměrných náhodných veličin

Definice 80.

$$E(X|Y) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x,$$

$$D(X|Y) = E[(X - E(X|Y))^2|Y].$$

Definice 81. Kovariance veličin X_i a X_j je definována vztahem

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E[(X_i - EX_i)(X_j - EX_j)].$$

Poznámka. Kovariance má následující vlastnosti:

1. $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - EX\,EY$;
2. $\mathrm{Cov}(X,X) = DX$;
3. Jsou-li X, Y nezávislé, pak $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Definice 82. Korelační koeficient veličin X, Y definujeme jako

$$\varrho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

za předpokladu, že EX^2 a EY^2 jsou konečné.

Definice 83. Je-li $\varrho(X,Y) = 0$, pak říkáme, že X a Y jsou nekorelované.

Věta 84. Jsou-li X, Y nezávislé, pak jsou nekorelované.

Příklad. Buď X náhodná veličina s rozdělením symetrickým kolem 0, tj. F_X je sudá funkce. Potom

1. $\mathrm{Cov}(X, X^2) = EX^3 - EX\,EX^2 = 0$;
2. $\mathrm{Cov}(X, X^2 + X) = EX^3 + EX^2 - EX\,EX^3 - EX\,EX \geq 0$;
3. $\mathrm{Cov}(X, X^3) = EX^4 - EX\,EX^3 = EX^4 \geq 0$;
4. $\mathrm{Cov}(X, |X|) = EX\,|X| - EX\,E\,|X| = 0$.

Věta 85 (Schwarzova nerovnost)**.** Buďte X, Y náhodné veličiny, $EX < +\infty$, $EY < +\infty$. Pak $[E(XY)]^2 \leq EX^2\,EY^2$. Rovnost nastává, právě když existuje $t \in \mathbb{R}$ tak, že $P(tX + Y = 0) = 1$ nebo $P(X + tY = 0) = 1$.

Důkaz. Pro libovolné $t \in \mathbb{R}$ platí $P((tX+Y)^2 \geq 0) = 1$ a tedy $E(tX+Y)^2 \geq 0$ a $t^2EX^2 + 2tE(XY) + EY^2 \geq 0$. Aby nerovnost platila pro každé $t \in \mathbb{R}$, musí být diskriminant levé strany nekladný, tedy

$$\frac{D}{4} = (E(XY))^2 - EX^2\,EY^2 \leq 0.$$

Rovnost nastává, právě když existuje t tak, že $E(tX+Y)^2 = 0$ a tedy $tX + Y = 0$ skoro všude tam, kde $f_{tX+Y} \neq 0$, tedy $P(tX + Y = 0) = 1$. $\square$

Věta 86. Buďte X, Y náhodné veličiny, $DX > 0$, $DY > 0$. Potom $-1 \leq \varrho(X,Y) \leq 1$, přičemž rovnost $\varrho = 1$ nastává, právě když existuje $t > 0$ tak, že $Y - EY = t(X - EX)$. Rovnost $\varrho = -1$ nastává, právě když existuje $t < 0$ tak, že $Y - EY = t(X - EX)$.

Důkaz. Ze Schwarzovy nerovnosti vyplývá

$$|E(X-EX)(Y-EY)| \leq \sqrt{E(X-EX)^2\, E(Y-EY)^2}.$$

Z toho okamžitě plyne, že $|\varrho(X,Y)| \leq 1$. Rovnost nastane, právě když existuje t takové, že $Y - EY = t(X - EX)$. Po vynásobení $(X - EX)$ a vystředování dostaneme $\operatorname{Cov}(X,Y) = E(X-EX)(Y-EY) = tDX$. Protože $|\varrho| = 1$ a $DX > 0$, musí být $\varrho = \operatorname{sgn} t$. □

9. Konvergence na prostoru náhodných veličin

Definice 87. Buď $(X_n)_1^\infty$ posloupnost náhodných veličin. Potom X_n konverguje k X podle pravděpodobnosti — značíme $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$ — pokud pro každé $\varepsilon > 0$ je

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\omega |\, |X_n - X| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Věta 88. Pro limitu podle pravděpodobnosti platí:

1. Jestliže $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$ a $Y_n \xrightarrow{\mathrm{P}} Y$, pak $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X + Y$.
2. Jestliže $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$, pak $X_n - X \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$.
3. Jestliže $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$, pak $\alpha X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \alpha X$.
4. Jestliže $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} K$, pak $X_n^2 \xrightarrow{\mathrm{P}} K^2$.
5. Jestliže $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} a$ a $Y_n \xrightarrow{\mathrm{P}} b$, pak $X_n Y_n \xrightarrow{\mathrm{P}} ab$.
6. Jestliže $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} a$ a $Y_n \xrightarrow{\mathrm{P}} b$, pak $X_n/Y_n \xrightarrow{\mathrm{P}} a/b$.

Důkaz. 1. Platí

$$\{\omega |\, |(X_n - X) + (Y_n - Y)| \geq \varepsilon\} \subset \{\omega |\, |X_n - X| + |Y_n - Y| \geq \varepsilon\} \subset$$
$$\subset \left\{\omega \,\middle|\, |X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{\omega \,\middle|\, |Y_n - Y| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Dále z Booleovy nerovnosti vyplývá, že

$$P(|(X_n - X) + (Y_n - Y)| \geq \varepsilon) \leq P(|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{2}) + P(|Y_n - Y| \geq \frac{\varepsilon}{2}).$$

2. $P(|X_n - X - 0| \geq \varepsilon) = P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$.
3. $P(|\alpha X_n - \alpha X| \geq \varepsilon) = P(|X_n - X| \geq \frac{\varepsilon}{a})$.
4. $P(|X_n - 0|^2 \geq \varepsilon) = P(|X_n| \geq \sqrt{\varepsilon})$. Potom pokud $X_n - K \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$, pak $Z_n = (X_n - K)^2 \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$, $Z_n = X_n^2 - 2KX_n + K^2 \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$. Dále označme $U_n = 2KX_n - K^2$. Protože $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} K$, platí $2KX_n \xrightarrow{\mathrm{P}} 2K^2$ a $2KX_n - K^2 \xrightarrow{\mathrm{P}} K^2$. Konečně $X_n^2 = Z_n + U_n \xrightarrow{\mathrm{P}} K^2$.
5. Z předchozích pravidel vyplývá, že

$$X_n Y_n = \frac{1}{4}((X_n + Y_n)^2 - (X_n - Y_n)^2) \xrightarrow{\mathrm{P}} \frac{1}{4}((a+b)^2 - (a-b)^2) = ab.$$

6. Nejprve dokážeme, že $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} 1 \implies \frac{1}{X_n} \xrightarrow{\mathrm{P}} 1$: Platí, že

$$\left\{\left|\frac{1}{X_n} - 1\right| \geq \varepsilon\right\} = \left\{\frac{1}{X_n} \leq 0\right\} \cup \left\{0 \leq \frac{1}{X_n} \leq 1 - \varepsilon\right\} \cup \left\{1 + \varepsilon \leq \frac{1}{X_n}\right\}.$$

Z Booleovy nerovnosti

$$P\left(\left|\frac{1}{X_n} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \leq P\left(\frac{1}{X_n} \leq 0\right) + P\left(0 \leq \frac{1}{X_n} \leq 1 - \varepsilon\right) + P\left(1 + \varepsilon \leq \frac{1}{X_n}\right).$$

Dále platí

$$P\left(\frac{1}{X_n}\leq 0\right)=P\left(X_n\leq 0\right)\leq P(X_n\leq 0)+P(X_n\geq 2)=$$
$$=P(|X_n-1|\geq 1)\to 0,$$

$$P\left(0<\frac{1}{X_n}\leq 1-\varepsilon\right)=P\left(X_n-1\geq\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\to 0,$$

$$P\left(\frac{1}{X_n}\geq 1+\varepsilon\right)=P\left(1-X_n\geq\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)\to 0.$$

Potom $\frac{Y_n}{b}\xrightarrow{\mathrm{P}}1$, podle lemmatu $\frac{b}{Y_n}\xrightarrow{\mathrm{P}}1$ a z předchozích pravidel pak $\frac{1}{a}X_n\frac{b}{X_n}\xrightarrow{\mathrm{P}}1$.

□

Příklad. Buďte $(X_n)_1^\infty$ iid $\sim N(\mu,\sigma^2)$,

$$Y_n=\frac{1}{n}\sum_1^n X_i.$$

Ukážeme, že $Y_n\xrightarrow{\mathrm{P}}\mu$. Pro Y_n platí $Y_n\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$.

$$\begin{aligned}P(|Y_n-\mu|\geq\varepsilon)&=1-P(|Y_n-n|<\varepsilon)=\\&=1-\int\limits_{S_n:|y_n-\mu|<\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\exp\left(-\frac{(y_n-\mu)^2n}{2\sigma^2}\right)\,\mathrm{d}y_n=\\&=1-\int\limits_{-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}}^{\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\to 1-\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)=0\end{aligned}$$

Definice 89. Posloupnost náhodných veličin X_n konverguje skoro jistě ($X_n\xrightarrow{\text{s.j.}}X$), právě když

$$P\left\{\omega\,\middle|\,\lim_{n\to\infty}X_n=X\right\}=1.$$

Definice 90. Posloupnost náhodných veličin X_n konverguje podle α-středu ($X_n\xrightarrow[\alpha]{\mathrm{S}}X$), právě když $E\left|X_n-X\right|^\alpha\to 0$.

Definice 91. Posloupnost náhodných veličin X_n konverguje v distribuci ($X_n\xrightarrow{\mathcal{D}}X$), právě když $F_{X_n}(x)\to F_X$ pro každé $x\in\mathbb{R}$, kde F_X je spojitá.

Definice 92. Kolmogorovova vzdálenost distribučních funkcí

$$K(F,G)=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|F(x)-G(x)\right|.$$

Píšeme $X_n\xrightarrow{\mathrm{K}}X$, právě když $K(F_{X_n},F_X)\to 0$.

Věta 93. Buď X_n posloupnost náhodných veličin. Potom platí:

1. $X_n\xrightarrow[\alpha=2]{\mathrm{S}}X\implies X_n\xrightarrow{\mathrm{P}}X$;
2. $X_n\xrightarrow{\text{s.j.}}X\implies X_n\xrightarrow{\mathrm{P}}X\implies X_n\xrightarrow{\mathcal{D}}X$.

Důkaz. 1. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné, potom

$$\begin{aligned}
P\{|X_n - x| \geq \varepsilon\} &= \int\limits_{S:|x_n - x|\geq\varepsilon} f_{X_n,X}\, \mathrm{d}x_n \mathrm{d}x \leq \\
&\leq \int\limits_{S:|x_n - x|\geq\varepsilon} \underbrace{\frac{(x_n - x)^2}{\varepsilon^2}}_{\geq 1} f_{X_n,X}\, \mathrm{d}x_n \mathrm{d}x \leq \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} (x_n - x)^2 f_{X_n,X} = \frac{1}{\varepsilon^2} E(X_n - X)^2.
\end{aligned}$$

2. (a)

$$\begin{aligned}
F_{X_n(x)} &= P(X_n \leq x) = \\
&= P(X_n \leq x \wedge |X_n - X| < \varepsilon) + P(X_n \leq x \wedge |X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \\
&\leq P(X - \varepsilon < x \wedge |X_n - X| < \varepsilon) + P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \\
&\leq P(X \leq x + \varepsilon) + P(|X_n - X| \geq \varepsilon)
\end{aligned}$$

Z toho vyplývá, že $\limsup F_{X_n}(x) \leq F_X(x + \varepsilon)$. Analogicky se dokáže, že $F_{X_n}(x) \geq F_X(x - \varepsilon) - P(|X_n - X| \geq \varepsilon)$ a $\liminf F_{X_n}(x) \geq F_X(x - \varepsilon)$. Pokud je x bod spojitosti F_X, pak $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$.

(b) $X_n \xrightarrow{\text{s.j.}} X$, právě když

$$\{\omega | X_n \to X\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{p=n}^{\infty} \left\{\omega \,\middle|\, |X_p - X| \leq \frac{1}{k}\right\} = M \text{ a } P(M) = 1.$$

$$P(M^{\mathrm{C}}) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{p=n}^{\infty} \left\{|X_p - X| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) = 0,$$

z čehož vyplývá, že $\forall k \in \mathbb{N}$

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{p=n}^{\infty} \left\{|X_p - X| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) = 0$$

a z věty o spojitosti pravděpodobnosti

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{p=n}^{\infty} \left\{|X_p - X| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) = 0,$$

dále $(\forall k)(\forall \delta)(\exists n_0)(\forall n > n_0)$

$$P\left(\bigcup_{p=n}^{\infty} \left\{|X_p - X| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) < \delta,$$

a $(\forall k)(\forall \delta)(\forall p > n_0)$

$$P\left(|X_p - X| \geq \frac{1}{k}\right) < \delta.$$

□

10. Limitní věty teorie pravděpodobnosti

Věta 94 (Markovova nerovnost)**.** Buď X náhodná veličina, $EX < +\infty$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E\,|X|}{\varepsilon}.$$

Důkaz.

$$E|X| = \int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_{S:|x|\geq\varepsilon} |x| f_X(x)\,\mathrm{d}x \geq \varepsilon \int_{S} f_X(x)\,\mathrm{d}x = \varepsilon P(|X| \geq \varepsilon).$$

□

Věta 95 (Čebyševova nerovnost)**.** Buď X náhodná veličina, $EX^2 < +\infty$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Důkaz. Stačí dosadit za X do Markovovy nerovnosti $(X - EX)^2$ a přeznačit ε^2:

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) = P((X - EX)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(X - EX)^2}{\varepsilon^2}.$$

□

Věta 96 (Slabý zákon velkých čísel)**.** Buďte $(X_n)_1^\infty$ iid, označme $\mu = EX_j < \infty$, $\sigma^2 = DX_j < \infty$, buď

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \quad \text{pro každé } n.$$

Pak $\overline{X_n} \xrightarrow{\text{P}} \mu$, tj. $P(\left|\overline{X_n} - \mu\right| < \varepsilon) \to 1$.

Důkaz. Protože X_j jsou iid, je

$$E\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} EX_j = \mu$$

a

$$D\overline{X_n} = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} DX_j = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Potom z Čebyševovy nerovnosti vyplývá

$$P(\left|\overline{X_n} - \mu\right| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2},$$

přičemž pravá strana konverguje k 0 pro každé $\varepsilon > 0$. □

Věta 97 (Čebyšev)**.** Buďte $(X_n)_1^\infty$ nezávislé, $\mu_j = EX_j$, $\sigma_j = DX_j < \infty$. Pokud $\sup DX_j < \infty$, pak

$$\overline{X_n} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mu_j \xrightarrow{\text{P}} 0.$$

Důkaz.

$$E\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} EX_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mu_j$$

$$D\overline{X_n} = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} DX_j \leq \frac{c}{n}$$

$$P\left(\left|\overline{X_n} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mu_j\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{c}{n\varepsilon^2} \to 0.$$

□

Věta 98 (Bernoulli)**.** Buďte $(X_n)_1^\infty$ iid Bernoulliho náhodné veličiny, $X_i = \mathrm{Alt}(p)$,

$$S_n = \sum_{j=1}^n X_j.$$

Potom

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathrm{P}} p, \text{ tj. } P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \to 1.$$

Důkaz. Pro rozptyl alternativní náhodné veličiny platí

$$DX_j = p(1-p) < \infty.$$

Ze zákona velkých čísel potom vyplývá

$$\overline{X_n} = \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathrm{P}} EX_j = p.$$

□

Věta 99 (Kolmogorov — silný zákon velkých čísel)**.** Buďte $(X_n)_1^\infty$ nezávislé náhodné veličiny, $\sigma_j^2 = DX_j < \infty$, nechť řada

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{\sigma_j^2}{j^2} < \infty.$$

Pak

$$\overline{X_n} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n EX_j \xrightarrow{\text{s.j.}} 0.$$

Důkaz.

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{\sigma_j^2}{j^2} = \sigma^2 \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^2} < \infty.$$

□

Věta 100. Buďte $(X_n)_1^\infty$ iid, $E(X_j^{2k}) < \infty\ \forall k \in \mathbb{N}$. Pak

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j^k \xrightarrow{\mathrm{P}} \mu_k'(X_j) = E(X_j^k)$$

Důkaz. Protože $(X_n)_1^\infty$ jsou iid, jsou iid i $\left(X_n^k\right)_1^\infty$ a stačí aplikovat zákon velkých čísel. □

Věta 101. Buďte $(X_n)_1^\infty$ iid, $\sigma^2 = DX_1 < \infty$, $EX_j^4 < \infty$. Pak

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n (X_n - \overline{X_n})^2 \xrightarrow{\mathrm{P}} \sigma^2.$$

Věta 102. Buďte $(X_n)_1^\infty$ iid, $EX_1^4 < \infty$, $DX_1 = \sigma^2$. Pak

$$\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2 \xrightarrow{\mathrm{P}} \sigma^2.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}_n^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n 2X_i\overline{X_n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \overline{X_n}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\overline{X_n}^2 + \overline{X_n}^2 = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \overline{X_n}^2 \xrightarrow{\mathrm{P}} EX_1^2 - (EX_1)^2 = DX_1 = \sigma^2.\end{aligned}$$

□

Věta 103. Buďte $(X_n)_1^\infty$ iid. Pak

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^k \xrightarrow{\mathrm{P}} \mu_k(X_1) = E(X - EX)^k.$$

Věta 104 (Centrální limitní teorém)**.** Buďte $(X_n)_1^\infty$ iid, $EX_1 = \mu$, $DX_1 = \sigma^2$, definujeme dále

$$Y_n = \sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Pak $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \sim N(0,1)$, tzn.

$$F_{Y_n}(y) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\,\mathrm{d}t \quad \forall y.$$

Poznámka. 1. Konvergence v Y je stejnoměrná.

2. $\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mu) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,\sigma^2)$.
3. $\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mu) \sim AN(0,\sigma^2)$, AN ... asymptoticky normální rozdělení.

Věta 105 (Moivre, Laplace)**.** Buďte $S_m \sim \mathrm{Bi}(n,p)$,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad X_i \sim A(p).$$

Pak

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,1).$$

Důkaz. $EX_1 = p$, $DX_1 = p(1-p)$, potom tvrzení věty vyplývá přímo z CLT. □

Poznámka (Limitní tvar M.-L.).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n(k)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}}\exp\left(-\frac{(k-np)^2}{2npq}\right)} = 1.$$

$$P_n(k) \doteq \mathrm{e}^{-np}\frac{(np)^k}{k!}.$$

11. Základní pojmy ze statistiky

- Ω ... populace;
- $\omega \in \Omega$ ... individuum (element).
- X ... borelovsky měřitelná funkce na Ω, číselná charakteristika sledované vlastnosti.
- $\omega^{(n)} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ náhodný výběr z populace Ω šířky n.
- $\Omega^{(n)}$ všechny náhodné výběry.

Definice 106. Buď $\mathbf{X} = (X_n)_1^\infty$, $X_j(\omega^{(n)}) = X(\omega_j)$, X_j je nezávislé j-té pozorování X na $\omega^{(n)}$.

Definice 107. Buďte X náhodné veličiny s rozdělením F_X, $X_1 \dots, X_n$ nezávislá pozorování X, $F_{X_j} = F_X$. Potom definujeme:

1. Výběrový průměr $\overline{X_n}$;
2. Výběrový rozptyl

$$\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2,$$

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2;$$

3. Výběrová směrodatná odchylka $\widehat{\sigma}_n$, s_n;
4. Výběrový p-kvantil $x_p : F_X(x_p) = p$, $\widehat{X_p} = X_{[np]}$;
5. Výběrový medián

$$\tilde{X} = \begin{cases} X_{\left[\frac{n+1}{2}\right]} & \text{pro } n \text{ liché} \\ \frac{X_{\left[\frac{n}{2}\right]} + X_{\left[\frac{n}{2}+1\right]}}{2} & \text{pro } n \text{ sudé} \end{cases};$$

6. Výběrový obecný moment

$$m'_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_j^k;$$

7. Výběrový centrální moment

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X_n})^k;$$

8. Výběrové rozpětí

$$\max_{i\in\widehat{n}} X_i - \min_{i\in\widehat{n}} X_i;$$

9. Empirická distribuční funkce

$$F_n(X_1,\dots,X_n,x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{(-\infty,x)}(X_i)$$

Věta 108 (Glivenko-Cantelli)**.** Kolmogorovská vzdálenost $K(F_n, F_X) \xrightarrow{\text{s.j.}} 0$.

12. Odhad parametrů rozdělení

Definice 109. Libovolná borelovsky měřitelná funkce $\widehat{\Theta} = \widehat{\Theta}(\mathbf{X})$ se nazývá odhadem parametrů Θ na základě pozorování $X_1,\dots,X_n$. Libovolná borelovsky měřitelná funkce $T(\mathbf{X})$ se nazývá odhadem parametrické funkce $\tau(\Theta)$.

Definice 110. $\widehat{\Theta}$ se nazývá **nestranný odhad** Θ, pokud $E_\Theta(\widehat{\Theta}) = \Theta$ pro každé $\Theta \in \mathbf{\Theta}$. Pro parametrickou funkci: $E_\Theta[T(\mathbf{X})] = \tau(\Theta)$.

Definice 111. Posloupnost odhadů $(\Theta_n)_1^\infty$ nazýváme **konzistentním odhadem** Θ, pokud $\widehat{\Theta} \xrightarrow{\text{P}} \Theta\ \forall\Theta \in \mathbf{\Theta}$. Pro parametrickou funkci: $T_n(\mathbf{X}) \xrightarrow{\text{P}} \tau(\Theta)$.

Definice 112. $\widehat{\Theta}_n^*$ nazýváme **eficientním odhadem** Θ, pokud pro každý jiný $\widehat{\Theta}_n$ platí $E(\widehat{\Theta}_n^* - \Theta)^2 \le E(\widehat{\Theta}_n - \Theta)^2\ \forall\Theta \in \mathbf{\Theta}$.

Věta 113. Buď X náhodná veličina, $EX^2 < +\infty$. Pak $\overline{X_n}$ je nestranný a konzistentní odhad EX.

Důkaz. Nestrannost:

$$E\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = EX.$$

Konzistence: Ze zákona velkých čísel plyne $\overline{X_n} \xrightarrow{\text{P}} EX$. □

Věta 114. Buď X náhodná veličina, $EX^4 < +\infty$. Pak $\widehat{\sigma}_n^2$ je konzistentní a asymptoticky nestranný odhad DX a s_n^2 je konzistentní a nestranný odhad DX.

Důkaz.

$$\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2 \xrightarrow{\text{P}} DX.$$

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2 = \frac{n}{n-1}\widehat{\sigma}_n^2 \xrightarrow{\text{P}} DX.$$

$$\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - (\overline{X_n})^2$$

$$\begin{aligned} E(\overline{X_n})^2 &= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 = \frac{1}{n^2}E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^n X_iX_j\right) = \\ &= \frac{1}{n^2}(nEX^2 + n(n-1)(EX)^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EX^2 - E(\overline{X_n})^2 &= EX^2 - \frac{EX^2}{n} - \frac{n-1}{n}(EX)^2 = \\ &= \frac{n-1}{n}(EX^2 - (EX)^2) = \frac{n-1}{n}DX \to DX. \end{aligned}$$

$$E(s_n^2) = E\left(\frac{n}{n-1}\widehat{\sigma}_n^2\right) = \frac{n}{n-1}E(\widehat{\sigma}_n^2) = DX.$$

□

12.1. **Metoda momentů.** Hledáme parametry rozdělení $\Theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$. Předpokládejme existenci momentů $\mu'_1, \ldots, \mu'_k$, $\mu'_r = \mu'_r(\theta_1, \ldots, \theta_k)$. Dále předpokládejme, že $\boldsymbol{\mu}' = (\mu'_1(\Theta), \ldots, \mu'_k(\Theta))$ je regulární a prosté, tudíž lze vyjádřit $\theta_j = \theta_j(\mu'_1, \ldots, \mu'_k)$. Napočítáme výběrové momenty

$$m'_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^r$$

a dosadíme za $\mu'_1, \ldots, \mu'_k$. Dostaneme tak $\widehat{\theta}_j = \widehat{\theta}_j(\mathbf{X})$. Analogicky postupujeme při odhadu $\tau(\Theta)$.

Lemma 115. *Buď $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ borelovsky měřitelná v (x, y) a spojitá v bodě (a, b), $X_n \xrightarrow{\text{P}} a$, $Y_n \xrightarrow{\text{P}} b$. Pak $f(X_n, Y_n) \xrightarrow{\text{P}} f(a, b)$.*

Důkaz. Funkce f je spojitá v (a, b), právě když

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)(\|(x, y) - (a, b)\| < \delta \implies |f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon).$$

Dále platí

$$\max(|x - a|, |y - b|) < \delta \iff |x - a| < \delta \wedge |y - b| < \delta.$$

Spojitost funkce f v (a, b) lze zapsat množinově jako

$$\{\omega|\,|X(\omega) - a| < \delta\} \cap \{\omega|\,|Y(\omega) - b| < \delta\} \subset \{\omega|\,|f(X, Y) - f(a, b)| < \varepsilon\},$$

$$(\{\omega|\,|X(\omega) - a| < \delta\} \cap \{\omega|\,|Y(\omega) - b| < \delta\})^{\mathrm{C}} \supset (\{\omega|\,|f(X, Y) - f(a, b)| < \varepsilon\})^{\mathrm{C}}.$$

Z De Morgana pak plyne

$$\{\omega|\,|X(\omega) - a| \geq \delta\} \cup \{\omega|\,|Y(\omega) - b| \geq \delta\} \supset \{\omega|\,|f(X, Y) - f(a, b)| \geq \varepsilon\}$$

a z Booleovy nerovnosti

$$P(|X(\omega) - a| \geq \delta) + P(|Y(\omega) - b| \geq \delta) \geq P(|f(X, Y) - f(a, b)| \geq \varepsilon).$$

Z této nerovnosti pak okamžitě vyplývá tvrzení věty. □

Věta 116. Nechť mezi momenty $(\mu_1, \ldots, \mu_k)$ a $(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ existuje vzájemně jednoznačný vztah a nechť inverzní funkce $\theta_j = \theta_j(\mu'_1, \ldots, \mu'_k)$ jsou spojitými funkcemi $\mu'_1, \ldots, \mu'_k$. Pak odhady metodou momentů $\widehat{\Theta} = (\widehat{\theta}_1, \ldots, \widehat{\theta}_k)$ jsou konzistentní odhady Θ. Je-li navíc funkce $\tau(\Theta)$ spojitá, pak odhad $T(\mathbf{X})$ získaný metodou momentů je konzistentní odhad $\tau(\Theta)$.

Důkaz. Pro $\widehat{\theta}_j$ platí

$$\widehat{\theta}_j = \widehat{\theta}_j(\mathbf{X}) = \theta_j(m'_1(\mathbf{X}), \ldots, m'_k(\mathbf{X})) \xrightarrow{\mathrm{P}} \theta_j(\mu'_1(\mathbf{X}), \ldots, \mu'_k(\mathbf{X})) = \theta_j,$$

neboť podle zákona velkých čísel $m'_r \xrightarrow{\mathrm{P}} \mu'_r$. Konvergence $\widehat{\theta}_j \xrightarrow{\mathrm{P}} \theta_j$ pak plyne z předchozího lemmatu. □

Poznámka. Předností metody momentů jsou jednoduché rovnice a to, že dává konzistentní odhad. Problémy jsou v předpokladech, protože momenty vůbec nemusí existovat nebo θ_j nemusí být spojité.

12.2. **Nestranné odhady s minimálním rozptylem (MVUE).** Mějme dva nestranné konzistentní odhady $\widehat{\theta}_n^{(1)}$ a $\widehat{\theta}_n^{(2)}$. Otázka je, který z nich je „lepší". Z Čebyševovy nerovnosti

$$P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

plyne, že pro nestranný odhad $\widehat{\theta}$ platí

$$P(\left|\widehat{\theta} - \theta\right| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\widehat{\theta}}{\varepsilon^2}$$

pro každé ε. Jinými slovy menší rozptyl mi zaručuje nižší pravděpodobnost, že ten odhad „uletí". Otázka je, jak nízko lze s rozptylem $D\widehat{\theta}$ jít.

Definice 117. Buď $\mathbf{\Theta} \subset \mathbb{R}^1$. Systém hustot $\mathcal{F} = \{f(x, \theta) | \theta \in \mathbf{\Theta}\}$ nazveme **regulárním systémem hustot**, pokud

1. $\{x | f(x, \theta) > 0\} = \operatorname{supp} f$ nezávisí na θ,
2. Parciální derivace
$$\frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta}$$
existuje a je konečná pro všechna θ a pro skoro všechna x.
3. Střední hodnota
$$E\left(\frac{\partial \ln f(X, \theta)}{\partial \theta}\right) = 0$$
pro všechna θ.
4. Fisherova míra informace
$$\mathcal{I}(\theta) = E\left(\frac{\partial \ln f(X, \theta)}{\partial \theta}\right)^2 \in (0, \infty)$$
pro všechna θ.

Poznámka. Bod 3. je splněn, právě když $\int f$ lze derivovat za integrálem:

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta}\right) &= \int \frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta} f(x, \theta)\, \mathrm{d}x = \int \frac{f'(x, \theta)}{f(x, \theta)} f(x, \theta)\, \mathrm{d}x = \\ &= \int f'(x, \theta)\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \int f(x, \theta)\, \mathrm{d}x = 0. \end{aligned}$$

Platí, že

$$\mathcal{I}(\theta) = D\left(\frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta}\right),$$

neboť

$$E\left(\frac{\partial \ln f(X,\theta)}{\partial\theta}\right) = 0.$$

Body 3. a 4. lze také shrnout následovně: Náhodná veličina $\partial \ln f/\partial\theta$ má střední hodnotu 0 a konečný kladný rozptyl.

Věta 118. Buďte $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ dva nezávislé experimenty, $\mathcal{E}_1$ odpovídá regulární systém hustot $\mathcal{F}_1 = \{f_1(x,\theta)|\theta\in\mathbf{\Theta}\}$, $\mathcal{E}_2$ odpovídá $\mathcal{F}_2 = \{f_2(x,\theta)|\theta\in\mathbf{\Theta}\}$. Pak $\mathcal{I}_{X_1,X_2}(\theta) = \mathcal{I}_{X_1}(\theta) + \mathcal{I}_{X_2}(\theta)$.

Důkaz.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{X_1,X_2}(\theta) &= \iint \left[\frac{\partial \ln f_{X_1,X_2}(x_1,x_2,\theta)}{\partial\theta}\right]^2 f_{X_1,X_2}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \\
&= \iint \left[\left(\frac{\partial \ln f_{X_1}}{\partial\theta}\right)^2 + 2\frac{\partial \ln f_{X_1}}{\partial\theta}\frac{\partial \ln f_{X_2}}{\partial\theta} + \right. \\
&\quad + \left.\left(\frac{\partial \ln f_{X_1}}{\partial\theta}\right)^2\right] f_{X_1} f_{X_2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \\
&= \underbrace{\int \left(\frac{\partial \ln f_{X_1}}{\partial\theta}\right)^2 f_{X_1}}_{\mathcal{I}_{X_1}(\theta)} \underbrace{\int f_{X_2}}_{1}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 + \\
&\quad + \int \left(\frac{\partial \ln f_{X_2}}{\partial\theta}\right)^2 f_{X_2} \int f_{X_1}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 + E\left(\frac{\partial \ln f_{X_1}}{\partial\theta}\right) E\left(\frac{\partial \ln f_{X_2}}{\partial\theta}\right).
\end{aligned}$$

$\square$

Důsledek. Buďte $X_1,\dots,X_n$ iid. Potom $\mathcal{I}_{X_1,\dots,X_n}(\theta) = n\mathcal{I}_{X_1}(\theta)$.

Poznámka. Buď $\{f(x,\theta)\}$ regulární a nechť $\int f$ lze derivovat dvakrát podle θ za integrálem. Potom

$$\mathcal{I}(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln f}{\partial\theta^2}\right)$$

pro všechna θ.

Důkaz.

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\int f\,\mathrm{d}x = \int \frac{\partial f}{\partial\theta}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\partial \ln f}{\partial\theta} f\,\mathrm{d}x.$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\int \frac{\partial \ln f}{\partial\theta} f\,dx = \int \frac{\partial^2 \ln f}{\partial\theta} f + \int \frac{\partial \ln f}{\partial\theta}\frac{\partial f}{\partial\theta} = \int \frac{\partial^2 \ln f}{\partial\theta} f + \int \left(\frac{\partial \ln f}{\partial\theta}\right)^2 f.$$

$\square$

Věta 119 (Rao-Cramerova nerovnost)**.** Buď $\theta\in\mathbb{R}^1$, $\{f(x,\theta)\}$ regulární systém hustot, $\tau(\theta)$ diferencovatelná. Nechť $T(\mathbf{X})$ je nějaký nestranný odhad $\tau(\theta)$ takový, že $E(T(\mathbf{X}))$ je možné derivovat pod znakem E pro $\forall\theta\in\mathbf{\Theta}$. Pak

$$D(T(\mathbf{X})) \ge \frac{[\tau'(\theta)]^2}{\mathcal{I}(\theta)}.$$

Rovnost nastává, právě když existuje $K = K(\theta, n)$ tak, že s pravděpodobností 1 platí

$$\frac{\partial \ln f}{\partial\theta}(\mathbf{X},\theta) = K(T(\mathbf{X}) - \tau(\theta)).$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}\tau'(\theta) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}[E(T(\mathbf{x}))] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\int T(\mathbf{x})f(\mathbf{x},\theta)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int T(\mathbf{x})\frac{\partial f}{\partial \theta}(\mathbf{x},\theta)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \\ &= \int T(\mathbf{x})\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}(\mathbf{x},\theta)f(\mathbf{x},\theta)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = E\left(T(\mathbf{X})\frac{\partial \ln f}{\partial\theta}\right) = \\ &= \operatorname{Cov}\left(T(\mathbf{X}), \frac{\partial \ln f}{\partial \theta}(\mathbf{X},\theta)\right).\end{aligned}$$

Ze Schwarzovy nerovnosti potom vyplývá

$$\left|\operatorname{Cov}\left(T, \frac{\partial \ln f}{\partial\theta}\right)\right|^2 \leq DT(\mathbf{X})D\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\right),$$

tedy $[\tau'(\theta)]^2 \leq D(T(\mathbf{X}))\mathcal{I}(\theta)$. Rovnost nastává právě když

$$\frac{\partial \ln f}{\partial\theta}(\mathbf{X},\theta) - E\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}(\mathbf{X},\theta)\right) = K(T(\mathbf{X}) - E(T(\mathbf{X})))$$

platí s pravděpodobností 1. Z toho okamžitě plyne tvrzení věty. $\square$

Příklad. Nechť $f = N(\mu, 1)$, tedy

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2}\right).$$

Budeme odhadovat parametr μ.

$$\ln f = -\frac{1}{2}\ln 2\pi - \frac{(x-\mu)^2}{2},$$

$$\frac{\partial \ln f}{\partial \mu} = (x-\mu),$$

$$\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \mu^2} = -1.$$

Platí tedy

$$\mathcal{I}(\mu) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln f}{\partial\mu^2}\right) = -E(-1) = 1$$

a dál $\mathcal{I}_n(\mu) = n$, $\tau(\mu) = \mu$, RCLB$(\theta) = 1/n$ (RCLB je **Rao-Cramer Lower Bound**, rozptyl pod který se už nelze dostat). Dále platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln f(\mathbf{x},\theta)}{\partial\theta} &= \frac{\partial \ln \prod_{i=1}^n f(x_i,\theta)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln f}{\partial\theta}(x_i,\theta) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = \\ &= n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \mu\right) = K(T(\mathbf{X}) - \mu).\end{aligned}$$

Našli jsme tak K, pro které platí rovnost z Rao-Cramera a tedy $\overline{X_n}$ je odhad s minimálním rozptylem.

Poznámka. RCLB je dosažitelná, právě když $\{f(x,\theta)\}$ tvoří jednoparametrickou exponenciální třídu hustot.

Definice 120. Buď $\mathbf{\Theta} \subset \mathbb{R}^k$, potom $\{f(x,\Theta)\}$ nazveme **regulárním systémem hustot**, pokud

1. $\operatorname{supp} f$ nezávisí na Θ,
2. Parciální derivace
$$\frac{\partial f}{\partial \theta_i}(x,\Theta)$$
existují a jsou konečné pro všechna $i \in \widehat{k}$, pro všechna Θ a skoro všechna $\mathbf{x}$.

3. Střední hodnoty
$$E\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \theta_i}(X,\Theta)\right) = 0$$
pro každé $i \in \widehat{k}$ a pro každé Θ.
4. **Fisherova informační matice**
$$\mathbf{I}_{ij}(\Theta) = E\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \theta_i}(X,\Theta)\frac{\partial \ln f}{\partial \theta_j}(X,\Theta)\right)$$
je regulární a konečná

Poznámka. 1.
$$\mathbf{I}_{ij} = -E\left(\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right).$$

2. Jsou-li $X_1,\dots,X_n$ iid, pak $\mathbf{I}_{X_1,\dots,X_n}(\Theta) = n\mathbf{I}_{X_1}(\Theta)$.

Věta 121 (Rao-Cramerova nerovnost)**.** Buďte X_i pozorování, $\theta \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbb{R}^k$, $\{f(x,\Theta)|\Theta\}$ regulární systém hustot, $\tau(\Theta) : \boldsymbol{\Theta} \mapsto \mathbb{R}$, nechť dále existují derivace
$$\frac{\partial \tau}{\partial \theta_i}$$
pro každé $i \in \widehat{k}$, $T(\mathbf{X})$ nestranný odhad $\tau(\Theta)$ a nechť lze zaměnit $\partial/\partial\theta_i$ a $E(T(\mathbf{X}))$ pro každé i a každé θ. Pak
$$D(T(\mathbf{X})) \geq \boldsymbol{\tau}'(\Theta)\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\tau}'^{\mathrm{T}}(\Theta),$$
kde
$$\boldsymbol{\tau}'(\Theta) = \left(\frac{\partial \tau}{\partial \theta_1},\dots,\frac{\partial \tau}{\partial \theta_k}\right).$$

Důkaz. Sestrojíme matici $(k+1)\times(k+1)$:
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} D(T(\mathbf{X})) & \boldsymbol{\tau}'(\Theta) \\ \boldsymbol{\tau}'^{\mathrm{T}}(\Theta) & \mathbf{I}(\Theta) \end{pmatrix}$$
$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau}{\partial \theta_i}(\Theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta_i}(E(T(\mathbf{X}))) = \int T(x)\frac{\partial f(x,\Theta)}{\partial \theta_i}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int T(x)\frac{\partial \ln f(x,\Theta)}{\partial \theta_i} f(x,\Theta)\,\mathrm{d}x = E\left(T\frac{\partial \ln f}{\partial \theta_i}\right) = \mathrm{Cov}\left(T,\frac{\partial \ln f}{\partial \theta_i}\right).\end{aligned}$$
Zavedeme vektor
$$\left(T(\mathbf{X}),\frac{\partial \ln f}{\partial \theta_1},\dots,\frac{\partial \ln f}{\partial \theta_k}\right).$$
Matice $\mathbf{M}$ je pozitivně semidefinitní a platí
$$\begin{aligned}0 \leq |\mathbf{M}| &= D(T(\mathbf{X}))\,|\mathbf{I}(\Theta)| + \sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{\tau}'_i(\Theta)(-1)^i\,|\mathbf{M}_{1,i+1}| = \\ &= D(T(\mathbf{X}))\,|\mathbf{I}(\Theta)| + \sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{\tau}'_i(\Theta)(-1)^i\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\,|\mathbf{I}_{i,j}(\Theta)|\,\boldsymbol{\tau}'_j(\Theta) = \\ &= D(T(\mathbf{X}))\,|\mathbf{I}(\Theta)| + \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{k}(-1)^{i+j+1}\boldsymbol{\tau}'_i(\Theta)\,|\mathbf{I}_{i,j}(\Theta)|\,\boldsymbol{\tau}'_j(\Theta).\end{aligned}$$
$$D(T(\boldsymbol{X})) \geq \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{k}(-1)^{i+j}\boldsymbol{\tau}'_i(\Theta)\frac{|\mathbf{I}_{ij}(\Theta)|}{|\mathbf{I}(\Theta)|}{\boldsymbol{\tau}'_j}^{\mathrm{T}}(\Theta) = \boldsymbol{\tau}'(\Theta)\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\tau}'^{\mathrm{T}}(\Theta).$$

□

Příklad. Buďte $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\Theta = (\mu, \sigma^2)$, $\mathbf{I}(\Theta) = \mathbf{I}(\mu, \sigma^2)$,

$$\ln f = -\frac{1}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \sigma^2 - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\mathbf{I}_{1,1} = -E\left(\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \mu^2}\right) = -E\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma^2}$$

$$\mathbf{I}_{1,2} = -E\left(\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \mu \partial \sigma^2}\right) = -E\left(\frac{\partial}{\partial \mu}\left(-\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^4}\right)\right) = E\left(\frac{1}{\sigma^4}(X-\mu)\right) = 0.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{2,2} &= -E\left(\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \sigma^2 \partial \sigma^2}\right) = -E\left(\frac{\partial}{\partial \sigma^2}\left(-\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^4}\right)\right) = \\ &= -\frac{1}{2\sigma^4} + \frac{1}{\sigma^6} E(X-\mu)^2 = -\frac{1}{2\sigma^4} + \frac{1}{\sigma^4} = \frac{1}{2\sigma^4}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{I}(\mu, \sigma^2) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\sigma^4} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I}^{-1}(\mu, \sigma^2) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{n} \end{pmatrix}$$

Buď $\boldsymbol{\tau}(\mu, \sigma^2) = \mu$, potom $\boldsymbol{\tau}'(\mu, \sigma^2) = (1, 0)$,

$$D(T(\mathbf{X})) \geq \frac{\sigma^2}{n}$$

$$D(\overline{X_n}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{1}{n} DX = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Buď $\boldsymbol{\tau}(\mu, \sigma^2) = \sigma^2$, $\boldsymbol{\tau}'(\mu, \sigma^2) = (0, 1)$,

$$D(T(\mathbf{X})) \geq \frac{2\sigma^4}{n}.$$

RCLB není dosažitelná nestranným odhadem.

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X_n}^2),$$

$$D(s_n^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}.$$

Pokud se vykašleme na nestrannost, můžeme dosáhnout i nižšího rozptylu:

$$D(\widehat{\sigma}_n^2) = \frac{n-1}{n^2} 2\sigma^4 < \frac{2\sigma^4}{n} = \mathrm{RCLB}(\sigma^2).$$

Poznámka. Nedostatky:

1. Metoda dává pouze nestranné odhady. Odhad, který je „skoro nestranný“ a má menší rozptyl než UMVUE, může být někdy užitečnější.
2. UMVUE vůbec nemusí existovat, případně sice může existovat, ale je prakticky nepoužitelný.

12.3. Asymptotické metody odhadu Θ.

Definice 122. Buď $\widehat{\theta}$ nestranný odhad. Říkáme, že $\widehat{\theta}$ je **eficientní**, právě když

$$e = \frac{\mathrm{RCLB}(\theta)}{D(\widehat{\theta})} = 1.$$

Říkáme, že $\widehat{\theta}$ je **asymptoticky eficientní**, právě když $e \to 1$ pro $n \to \infty$.

Jsou-li $\widehat{\theta}_1$, $\widehat{\theta}_2$ nestranné odhady, potom veličinu

$$e_r = \frac{D(\widehat{\theta}_1)}{D(\widehat{\theta}_2)}$$

nazýváme **relativní eficience**.

Definice 123. Buď $\widehat{\Theta}_n$ odhad parametru Θ_0. Říkáme, že $\widehat{\Theta}_n$ je **asymptoticky nestranný**, právě když $E(\widehat{\Theta}_n) \to \Theta_0$.

Definice 124. Buď $T_n(\mathbf{X})$ odhad parametrické funkce $\tau(\theta_0)$. Říkáme, že $\widehat{T}_n$ má **asymptoticky normální rozdělení** se střední hodnotou 0 a rozptylem $\sigma^2(\theta_0)$, právě když

$$\sqrt{n}(T_n(\mathbf{X}) - \tau(\theta_0)) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2(\theta_0)).$$

Poznámka.
1. Z asymptotické normálnosti neplyne nestrannost (ani asymptotická).
2. Vůbec nemusí platit, že $D(\sqrt{n}T_n) \to \sigma^2(\theta_0)$.

Definice 125. Nechť $T_n(\mathbf{X})$ je asymptoticky normální odhad $AN(0, \sigma^2(\theta))$. Říkáme, že T_n je eficientní (resp. asymptoticky eficientní), právě když

$$\sigma^2 = \frac{(\tau'(\theta))^2}{\mathcal{I}_1(\theta)}.$$

Věta 126. Buďte $X_1, \dots, X_n \sim f_X(x, \theta)$, $\theta \in \mathbf{\Theta} \subset \mathbb{R}$, $\mathbf{\Theta}$ je otevřená množina, nechť

1. $\operatorname{supp} f$ nezávisí na θ,
2. $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$ existují a jsou spojité v θ,
3. lze zaměnit $\int f$ a $\frac{\partial}{\partial \theta}$,
4. Fisherova míra informace $0 < \mathcal{I}(\theta) < \infty$,
5. $$\left| \frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta^2} \right| \leq M(x),$$
   kde $E(M(x)) < \infty$.

Pak pro každý asymptoticky normální odhad

$$\sqrt{n}(T_N(\mathbf{X}) - \tau(\theta)) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma^2(\theta))$$

platí

$$\sigma^2(\theta) \geq \frac{\tau'(\theta)}{\mathcal{I}_1(\theta)}$$

až na množinu Lebesguovy míry 0.

Poznámka.
1. Body, pro které uvedená nerovnost neplatí, nazýváme **body supereficience**.
2. Je-li $\mathcal{I}(\theta)$ spojitá na $\mathbf{\Theta}$, je spojitá i $\sigma^2(\theta)$ a nerovnost platí všude.

Věta 127. Pokud $\sqrt{n}(T_n - \tau) \underset{\mathbf{\Theta}}{\overset{\mathrm{D}}{\rightrightarrows}} N(0, \sigma^2)$, pak výše uvedená nerovnost platí pro každé θ.

Definice 128. Pro asymptoticky normální odhady $T_n^{(1)} \sim AN(0, \sigma_1^2(\theta))$, $T_n^{(2)} \sim AN(0, \sigma_2^2(\theta))$ definujeme **asymptotickou relativní eficienci**

$$\mathrm{ARE} = \frac{\sigma_1^2(\theta)}{\sigma_2^2(\theta)}.$$

12.4. **Odhady metodou maximální věrohodnosti.**

Definice 129. Buďte $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ nezávislá pozorování s rozdělením

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \Theta) = \prod_{j=1}^{n} f_{X_j}(x_j, \Theta).$$

Potom libovolnou funkci $L(\Theta|\mathbf{x}) = c(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \Theta)$ nazýváme **věrohodnostní funkcí**. Funkci $l(\Theta|\mathbf{x}) = \ln L(\Theta|\mathbf{x})$ nazýváme **logaritmickou věrohodnostní funkcí**.

Odhadem metodou maximální věrohodnosti se rozumí odhad

$$\widehat{\Theta}_{\mathrm{MLE}} = \widehat{\Theta}_{\mathrm{MLE}}(\mathbf{X}) = \arg \sup_{\Theta \in \boldsymbol{\Theta}} L(\Theta|\mathbf{X}),$$

za předpokladu, že $\sup L$ existuje a je konečné, že $\widehat{\Theta}_{\mathrm{MLE}}$ závisí na $\mathbf{X}$ a že je $\widehat{\Theta}_{\mathrm{MLE}}$ určen jednoznačně.

Pro $\tau(\Theta)$ definujeme $T_{\mathrm{MLE}}(\mathbf{X}) = \tau(\widehat{\Theta}_{\mathrm{MLE}})$.

Lemma 130 (Jensenova nerovnost)**.** Buď $\Phi(t)$ konvexní (resp. konkávní) funkce. Pak $E(\Phi(X)) \geq \Phi(EX)$ (resp. $E(\Phi(X)) \leq \Phi(EX)$).

Důkaz. Buď $L(t)$ tečna k $\Phi(t)$ v bodě EX. Platí, že

$$E(L(X)) = E(\alpha X + \beta) = \alpha EX + \beta = L(EX).$$

Potom $E(\Phi(X)) \geq E(L(X)) = L(EX) = \Phi(EX)$. Analogicky pro konkávní funkci. □

Věta 131. Buďte $X_1, \dots, X_n$ iid s rozdělením $f(x_i, \theta)$, $\theta \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbb{R}^1$, nechť $EX_1 < \infty$. Pak

$$\lim_{n \to \infty} P(L(\theta_0) > L(\theta)) = 1,$$

kde θ_0 je skutečná hodnota parametru θ a $\theta \neq \theta_0$ je libovolný bod z $\boldsymbol{\Theta}$.

Důkaz. Platí, že

$$\{L(\theta_0) > L(\theta)\} = \left\{ \frac{L(\theta)}{L(\theta_0)} < 1 \right\} = \left\{ \log \frac{L(\theta)}{L(\theta_0)} < 0 \right\} =$$
$$= \left\{ \log \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)}{\prod_{i=1}^n f(x_i, \theta_0)} < 0 \right\} = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log \frac{f(x_i, \theta)}{f(x_i, \theta_0)} < 0 \right\},$$

přičemž

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log \frac{f(x_i, \theta)}{f(x_i, \theta_0)} \xrightarrow{\mathrm{P}} E\left(\log \frac{f(X, \theta)}{f(X, \theta_0)} \right).$$

Potom

$$E_{\theta_0}\left(\log \frac{f(X, \theta)}{f(X, \theta_0)} \right) < \log E_{\theta_0}\left(\frac{f(X, \theta)}{f(X, \theta_0)} \right) = \log \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x, \theta)}{f(x, \theta_0)} f(x, \theta_0)\, \mathrm{d}x =$$
$$= \log 1 = 0.$$

□

V praxi se používá hlavně $l(\theta, x)$, protože hodně rozdělení je exponenciálního typu.

Jsou-li splněny předpoklady

1. $\sup l$ se nabývá ve vnitřním bodě $\mathbf{\Theta}$,
2. $\operatorname{supp} l = \operatorname{supp} f_X$ nezávisí na Θ,
3. existuje $\frac{\partial l(\Theta|\mathbf{X})}{\partial \theta_i}$,

pak $\widehat{\Theta}_{\mathrm{MLE}}$ lze najít řešením soustavy věrohodnostních rovnic

$$\frac{\partial l(\Theta|\mathbf{X})}{\partial \theta_i}.$$

Příklad. Buď $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\Theta(\mu, \sigma)$, $X_1, \dots, X_n$ pozorování na X.

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma^2|\mathbf{x}) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(X_i - \mu)^2\right) = \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sigma^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2\right), \end{aligned}$$

$$l(\mu, \sigma^2|\mathbf{x}) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2.$$

Po provedení derivací dostáváme věrohodnostní rovnice:

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) = 0,$$

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 = 0.$$

Tyto rovnice řeší

$$\widehat{\mu}_{\mathrm{MLE}} = \overline{X_n}, \quad \widehat{\sigma}^2_{\mathrm{MLE}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n}) = \widehat{\sigma}^2_n.$$

Věta 132. Nechť systém hustot $\{f(x|\theta)|\theta \in \mathbf{\Theta} \subset \mathbb{R}^1\}$ je regulární, nechť $\widehat{\theta}(\mathbf{X})$ je nestranný odhad θ takový, že $D(\widehat{\theta}) = \mathrm{RCLB}(\theta)$. Pak $\widehat{\theta}$ je řešením věrohodnostních rovnic.

Důkaz. V Rao-Cramerově nerovnosti nastává rovnost, takže existuje $K(\theta)$ taková, že

$$\frac{\partial \ln f_{\mathbf{X}}}{\partial \theta} = K(\theta)(\widehat{\theta}(\mathbf{X}) - \theta).$$

Je-li $\widehat{\theta} = \theta$, pak se to rovná nule. □

Věta 133. Nechť systém hustot $\{f(x|\theta)|\theta \in \mathbf{\Theta} \subset \mathbb{R}^1\}$ je regulární a nechť jsou splněny předpoklady Rao-Cramerovy nerovnosti, nechť $\tau(\theta)$ je prostá, nestranný odhad $T(\mathbf{X})$ funkce $\tau(\theta)$ je jednoznačný a $DT = \mathrm{RCLB}$. Pak věrohodnostní rovnice má právě jedno řešení, toto řešení je funkcí $T(\mathbf{X})$ a je MLE.

Důkaz. Existence řešení vyplývá opět z Rao-Cramerovy nerovnosti:

$$\frac{\partial \ln f_{\mathbf{X}}}{\partial \theta} = K(\theta)(T(\mathbf{X}) - \tau(\theta)) = 0.$$

Věrohodnostní rovnice splňuje $\widehat{\theta} = \tau^{-1}(T(\mathbf{X}))$. Dále, protože $0 < \mathcal{I}_n(\theta) < \infty$, je

$$\frac{\partial^2 \ln f_{\mathbf{X}}}{\partial \theta^2} = K'(\theta)(T(\mathbf{X}) - \tau(\theta)) - K(\theta)\tau'(\theta)$$

$$\underbrace{E\left(\frac{\partial^2 \ln f_{\mathbf{X}}}{\partial \theta^2}\right)}_{-\mathcal{I}_n(\theta)} = K'(\theta)(\underbrace{ET(\mathbf{X})}_{\tau(\theta)} - \tau(\theta)) - K(\theta)\tau'(\theta),$$

takže $K(\theta)\tau'(\theta) = \mathcal{I}_n(\theta) > 0$ a proto $K(\theta) \neq 0$. Pro druhou derivaci platí

$$\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta^2}(\widehat{\theta}) = 0 - \mathcal{I}_n(\widehat{\theta}) < 0,$$

je tam maximum a tedy odhad je MLE. □

Věta 134. Buďte $X_1, \dots, X_n$ iid s rozdělením $f(x, \theta)$, $\theta \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\Theta}$ je otevřená množina, θ_0 skutečná hodnota parametru. Nechť existuje $\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}(x, \theta)$ na okolí $(\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$. Pak s pravděpodobností jdoucí k 1 pro $n \to \infty$ má věrohodnostní rovnice kořen $\widehat{\theta}_n$, který je konzistentním odhadem θ_0.

Důkaz. Protože $P(L(\theta_0) > L(\theta)) \to 1$, pro libovolné δ platí $P(l(\theta_0 + \delta) - l(\theta_0) < 0) \to 1$ a $P(l(\theta_0 - \delta) - l(\theta_0) < 0) \to 1$. Funkce l je spojitá v θ a existuje derivace $\frac{\partial l}{\partial \theta}$. Z toho vyplývá, že l má na $(\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$ nějaké lokální maximum. Jelikož to platí pro libovolné δ, s pravděpodobností jdoucí k 1 platí $\frac{\partial l}{\partial \theta}(\theta_0) = 0$ a toto řešení je jednoznačné. Z toho vyplývá tvrzení věty. □

Lemma 135 (Slutsky)**.** Nechť $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ a $Y_n \xrightarrow{\mathrm{P}} c$ $(c < \infty)$. Pak

1. $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X + c$,
2. $X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} cX$,
3. $X_n / Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X/c$ $(c \neq 0)$.

Věta 136. Buďte $X_1, \dots, X_n$ iid s rozdělením $f(x, \theta)$, $\theta \in \boldsymbol{\Theta} \subset \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\Theta}$ je otevřená množina. Nechť

1. $\operatorname{supp} f$ nezávisí na θ,
2. existuje $\frac{\partial f}{\partial \theta_i}$ pro každé θ a skoro všechna x,
3. $\int f' = 0$, $\int f'' = 0$,
4. $0 < \mathcal{I}(\theta) < \infty$,
5. pro každé θ a skoro všechna x je
$$\left| \frac{\partial^3 \log f}{\partial \theta^3}(\theta, x) \right| \leq M(x),$$
kde $EM(X) < \infty$.

Pak pro každé konzistentní řešení věrohodnostní rovnice (označme ho $\widehat{\theta}_n$) platí

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\left(0, \frac{1}{\mathcal{I}(\theta)}\right).$$

Důkaz. Nechť odhad $\widehat{\theta}_n$ řeší věrohodnostní rovnici a je konzistentní. Nechť θ_0 je skutečná hodnota parametru. Potom

$$0 = l_n'(\widehat{\theta}_n) = l_n'(\theta_0) + (\widehat{\theta}_n - \theta_0) l_n''(\theta_0) + \frac{1}{2}(\widehat{\theta}_n - \theta_0)^2 l'''(\widehat{\theta}_*),$$

kde $\widehat{\theta}_* \in (\widehat{\theta}_n, \theta_0)$ nebo $\in (\theta_0, \widehat{\theta}_n)$.

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta_0) &= \frac{-\sqrt{n}\, l_n'(\theta_0)}{l_n''(\theta_0) + \frac{1}{2}(\widehat{\theta}_n - \theta_0) l'''(\widehat{\theta}_*)} = \\ &= \frac{-\frac{1}{\sqrt{n}}\, l_n'(\theta_0)}{\frac{1}{n} l_n''(\theta_0) + \frac{1}{2n}(\widehat{\theta}_n - \theta_0) l'''(\widehat{\theta}_*)}. \end{aligned}$$

Z konzistence $\widehat{\theta}_n$ plyne $(\widehat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$. Ze zákona velkých čísel plyne konvergence

$$\frac{1}{n} l_n''(\theta_0) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} l_j''(\theta_0) \xrightarrow{\mathrm{P}} E(l_j''(\theta_0)) = -\mathcal{I}_1(\theta)$$

a

$$\left|\frac{1}{n}l'''_n(\widehat{\theta}_*)\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n l'''_j(\widehat{\theta}_*)\right| \le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \left|l'''_j(\widehat{\theta}_*)\right| \le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n M(x) \xrightarrow{\mathrm{P}} E(M(X)) < \infty.$$

Z toho vyplývá, že

$$P\left(\left|\frac{1}{n}l'''_n(\widehat{\theta}_*)\right| \le K\right) \to 1.$$

Z centrálního limitního teorému ($\sqrt{n}(\overline{X_n}-\mu) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0,\sigma^2)$) plyne (z bodu 3 vyplývá, že $E(l'_1(\theta_0)) = 0$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}}l'_n(\theta_0) &= \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}l'_n(\theta_0)\right) = \\ &= \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n l'_j(\theta_0) - \underbrace{E(l'_1(\theta_0))}_{0}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, D(l'_1(\theta_0))) = N(0, I(\theta_0)).\end{aligned}$$

Z předchozího lemmatu pak

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{N(0,\mathcal{I}(\theta_0))}{\mathcal{I}(\theta_0)} = N\left(0, \frac{1}{\mathcal{I}(\theta_0)}\right).$$

□

Důsledek. Odhad $\widehat{\theta}_n$ je asymptoticky eficientní, protože $\tau(\theta) = \theta$ a $\tau'(\theta) = 1$.

Poznámka. 1. Pokud existuje právě jedno řešení věrohodnostních rovnic, je MLE, konzistentní, asymptoticky normální a eficientní.
2. Zkratkou ELE se někdy označují eficientní věrohodnostní odhady.

Věta 137. Buďte $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$, $\widehat{\Theta}$ konzistentní řešení soustavy věrohodnostních rovnic a nechť platí ostatní předpoklady analogické předchozí větě. Pak $\sqrt{n}(\widehat{\Theta}_n - \Theta) \xrightarrow{\mathcal{D}} N_k(0, \mathbf{I}^{-1}(\Theta))$.

Poznámka. Nevýhody metody MLE:

1. Rovnice se dost špatně řeší.
2. I když se řešení najde, neví se, zda je to globální maximum.
3. MLE je jen asymptoticky eficientní, existují odhady, které jsou pro dané n lepší.

Definice 138. Buďte $X_1, \dots, X_n$ pozorování. Říkáme, že $X_1, \dots, X_n$ mají **sdružené normální rozdělení**, pokud

1. existuje $\mathbf{Z} = \lceil Z_1, \dots, Z_n \rceil$, kde $Z_j \sim N(0,1)$ a jsou nezávislé,
2. existuje $\boldsymbol{\mu} = \lceil \mu_1, \dots, \mu_n \rceil$, kde $\mu_j \in \mathbb{R}$ jsou konstanty,
3. existuje nesingulární matice $\mathbf{A}$

tak, že $\mathbf{X} = \mathbf{AZ} + \boldsymbol{\mu}$.

Najdeme analytický tvar rozdělení $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$.

$$f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) = \prod_{j=1}^n f_{Z_j}(z_j) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z_j^2}{2}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}\right).$$

Použijeme transformaci $\mathbf{z} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$, $\left|\mathcal{J}_{\varphi^{-1}}\right| = \left|\det \mathbf{A}^{-1}\right|$

$$\begin{aligned}f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= \left|\det \mathbf{A}^{-1}\right| f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left|\det \mathbf{A}^{-1}\right| \exp\left(\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right).\end{aligned}$$

Označme $\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, potom $\left|(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\right|\left|\mathbf{A}^{-1}\right| = \left|\mathbf{C}^{-1}\right|$, $\left|\mathbf{A}^{-1}\right| = \sqrt{|\mathbf{C}^{-1}|}$. Tedy

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\sqrt{|\mathbf{C}^{-1}|}\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right)$$

Lemma 139. Matice $\mathbf{C}^{-1}$ je symetrická a pozitivně definitní.

Důkaz.

$$(\mathbf{C}^{-1})^{\mathrm{T}} = ((\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{C}^{-1}.$$

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}((\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{x} = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x})^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}) > 0.$$

□

Věta 140. Nechť $X_1, \dots, X_n$ mají N_n. Pak $\boldsymbol{\mu} = E\mathbf{X}$ a $\mathbf{C} = \mathrm{Cov}(\mathbf{X})$.

Důkaz.

$$E\mathbf{X} = E(\mathbf{A}\mathbf{Z} + \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{A}E(\mathbf{Z}) + E\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\mathbf{X}) &= E(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}} = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\frac{1}{\sqrt{|\mathbf{C}|}} \\
&\quad \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right)\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{z}\right)\mathbf{A}\mathbf{z}\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}\mathbf{z} = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\mathbf{A}\underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathbf{z}\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}\right)}_{\mathbf{Q}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}\mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{C},
\end{aligned}$$

neboť

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{jj} &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} z_j^2\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} z_i^2\right)\,\mathrm{d}\mathbf{z} = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} z_j^2\exp\left(-\frac{1}{2}z_j^2\right)\,\mathrm{d}z_j\prod_{i\neq j}^{n}\int\limits_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{1}{2}z_k^2\right)\,\mathrm{d}z_k = (\sqrt{2\pi})^n
\end{aligned}$$

a pro $j \neq k$ je $\mathbf{Q}_{jk} = 0$. □

Věta 141. Buďte $(X_1, \dots X_n) \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C})$ a $\mathbf{D}$ nesingulární matice. Pak

1. $\mathbf{D}\mathbf{X} \sim N_n(\mathbf{D}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{D}\mathbf{C}\mathbf{D}^{\mathrm{T}})$.
2. $(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}) \sim N_n$.
3. $(X_1, \dots, X_k) \sim N_k(\boldsymbol{\mu}_{1k}, \mathbf{C}_{1k})$, kde $\boldsymbol{\mu}_{1k} = (\mu_1, \dots, \mu_k)$,
$$\mathbf{C}_{1k} = \mathbf{C}\begin{pmatrix}1, \dots, k\\ 1, \dots, k\end{pmatrix}.$$
4. $(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \sim N_k$.
5. $X_j \sim N(\mu_j, \sigma_j^2 = \mathbf{C}_{jj})$.
6. $\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} \sim N(\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{k}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{k})$.
7. $(X_1, \dots X_n)$ jsou nezávislé, právě když $\mathbf{C}$ je diagonální.

13. Disclaimer