1 Kapitola 2: Lagrangeův formalismus

Příklad 2.1

Napište Lagrangeovu funkci volného bezsilového hmotného bodu (a) v kartézských souřadnicích, (b) ve sférických souřadnicích, (c) v cylindrických souřadnicích.
Řešení: (a)

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)$$

(b) transformace (a) pomocí

$$x_1 = r\cos\varphi\sin\theta$$
$$x_2 = r\sin\varphi\sin\theta$$
$$x_3 = r\cos\theta$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + r^2\dot{\theta}^2)$$

(c) transformace (a) pomocí

$$x_1 = r\cos\varphi$$
$$x_2 = r\sin\varphi$$
$$x_3 = x_3$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}_3^2)$$

Příklad 2.1 □

Příklad 2.2

Napište Lagrangeovu funkci volného hmotného bodu, na který působí homogenní gravitační pole a elastická centrální izotropní síla.
Řešení:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - mgx_3 - \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

Příklad 2.2 □

Příklad 2.3

Napište Lagrangeovu funkci volné nabité částice v elektrostatickém poli.
Řešení:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - q(\varphi - \sum_{i=1}^{3} A_i\dot{x}_i)$$

Příklad 2.3 □

Příklad 2.4

Najděte výraz pro obecnou hybnost a energii nabité částice v elektromagnetickém poli z Lagrangeovy funkce $L = \frac{1}{2}mv^2 - q(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A})$.

Řešení: Obecná hybnost:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m\dot{x}_j + qA_j$$

$$\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}$$

Obecná energie:

$$E = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}\dot{x}_j - L = \sum_j \frac{1}{2}m\dot{x}_j^2 + q\varphi$$

Příklad 2.4 □

Příklad 2.5

Přesvědčete se, že vazba určená Pfaffovou formou

$$\left[x_2(x_1-x_2)^2 - x_1x_2^3\right]dx_1 + \left[x_1^3x_2 - x_1(x_1-x_2)^2\right]dx_2 - x_1x_2(x_1-x_2)^2dx_3 = 0$$

je ekvivalentní holonomní vazbě $x_3 = \ln\left|\frac{x_1}{x_2}\right| + \frac{x_1x_2}{x_1-x_2} + C$.

Řešení: Označíme-li pro přehlednost funkce u diferenciálů Pfaffovy formy $a_1dx_1 + a_2dx_2 + a_3dx_3 = 0$, můžeme podmínku ekvivalence vazeb zachytit jako

$$\begin{array}{l} 0 = \frac{\partial x_3}{\partial x_1} + \frac{a_1}{a_3} \\ 0 = \frac{\partial x_3}{\partial x_2} + \frac{a_2}{a_3} \end{array}.$$

Upravíme výrazy a dostaneme

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\ln\left|\frac{x_1}{x_2}\right| + \frac{x_1x_2}{x_1-x_2} + C\right) - \frac{x_2(x_1-x_2)^2 - x_1x_2^3}{x_1x_2(x_1-x_2)^2} = \\ &\quad = \frac{x_2}{x_1x_2} + \frac{x_2(x_1-x_2) - x_1x_2}{(x_1-x_2)^2} - \frac{1}{x_1} + \frac{x_2^2}{(x_1-x_2)^2} = 0. \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\ln\left|\frac{x_1}{x_2}\right| + \frac{x_1x_2}{x_1-x_2} + C\right) + \frac{x_1(x_1-x_2)^2 - x_1^3x_2}{x_1x_2(x_1-x_2)^2} =, \\ &\quad = -\frac{x_2x_1}{x_1x_2^2} + \frac{x_1(x_1-x_2) + x_1x_2}{(x_1-x_2)^2} + \frac{1}{x_2} - \frac{x_1^2}{(x_1-x_2)^2} = 0, \end{aligned}$$

což bylo dokázati.

Příklad 2.5 □

Příklad 2.6

Napište Lagrangeovu funkci matematického kyvadla.
Řešení: Použijeme polární souřadnice

$$L = T - U = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + mgr\cos\varphi$$

Příklad 2.6 □

Příklad 2.7

Odvoďte pohybové rovnice matematického kyvadla s pružným závěsem tuhosti k a s rovnovážnou délkou r_0 (bez zatížení). Zkoumejte limitu $k/m \to \infty$ jako přechod k ideální vazbě (pozn. osy volíme tak, že tíhové pole působí ve směru osy y).
Řešení: Pomocí

$$\begin{aligned} x &= r(t)\cos\varphi(t) \\ y &= r(t)\sin\varphi(t) \\ z &= 0 \end{aligned}$$

transformujeme Lagrangeovu funkci

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgy - \frac{1}{2}k\left(r - r_0\right)^2$$

na

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + mgr\cos\varphi - \frac{1}{2}k\left(r - r_0\right)^2.$$

Lagrangeovy pohybové rovnice

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{d}{dt}\left(m\dot{r}\right) - mr\dot{\varphi}^2 - mg\cos\varphi + k(r - r_0) = m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 - mg\cos\varphi + k(r - r_0) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\varphi}\right) - mgr\sin\varphi = 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi} - mgr\sin\varphi = 0$$

čímž jsme dostali soustavu diferenciálních rovnic

$$\frac{m}{k}(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - g\cos\varphi) + r - r_0 = 0$$

$$\ddot{\varphi} + 2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\varphi} - \frac{g}{r}\sin\varphi = 0$$

a při limitě $\frac{k}{m} \to \infty$, tj. $\frac{m}{k} \to 0$, dostaneme z první rovnice $r = r_0$ a druhá rovnice potom popisuje pohyb matematického kyvadla s pevným závěsem.

Příklad 2.7 □

Příklad 2.8

Odvoďte pohybovou rovnici matematického kyvadla, jehož délka roste lineárně s časem $r = r_0(1+kt)$, kde r_0 a k jsou konstanty. (pozn. osy volíme tak, že tíhové pole působí ve směru osy y)

Řešení: Pomocí

$$\begin{aligned} x &= r_0(1+kt)\sin\varphi(t) \\ y &= r_0(1+kt)\cos\varphi(t) \\ z &= 0 \end{aligned}$$

transformujeme Lagrangeovu funkci

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgy$$

na

$$L = \frac{1}{2}m(r_0^2k^2 + r_0^2(1+kt)^2\dot{\varphi}^2) + mgr_0(1+kt)\cos\varphi$$

a zjednodušíme vypuštěním konstant

$$L = \frac{1}{2}mr_0^2(1+kt)^2\dot{\varphi}^2 + mgr_0(1+kt)\cos\varphi.$$

Lagrangeovy pohybové rovnice

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr_0^2(1+kt)^2\dot{\varphi}\right) + mgr_0(1+kt)\sin\varphi = mr_0^2 2k(1+kt)\dot{\varphi} + mr_0^2(1+kt)^2\ddot{\varphi} + mgr_0(1+kt)\sin\varphi = 0$$

čímž jsme dostali diferenciální rovnici

$$(1+kt)\ddot{\varphi} + 2k\dot{\varphi} + \frac{g}{r_0}\sin\varphi = 0.$$

(pozn.: Pro přehlednost je lepší pracovat obecně, tj. použít $r(t)$ jako v př. 2.7 a dosazovat až nakonec.)

Příklad 2.8 □

Příklad 2.9

Napište Lagrangeovu funkci matematického kyvadla, jehož bod závěsu se pohybuje předepsaným způsobem v rovině kyvů (rheonomní vazba) (a) konstantní rychlostí po vodorovné přímce (b) s konstantním zrychlením po vodorovné přímce (c) kmitavým pohybem podle zákona $a\cos\omega t$ po vodorovné přímce (d) kmitavým pohybem $a\sin\omega t$ po svislé přímce (e) s konstantní úhlovou rychlostí ω po svislé kružnici.

Řešení: V inerciální soustavě má Lagrangeova funkce tvar $L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - U(\vec{r})$

Po transformaci do obecně neinerciální soustavy vztahem $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}(t)$, kde $\vec{V}(t)$ je rychlost, kterou se soustava pohybuje, a po vypuštění úplných časových derivací (viz teorie) dostaneme

$$L' = \frac{1}{2}m\vec{v}'^2 - m\vec{r}'\dot{\vec{V}} - U(\vec{r}').$$

Poznamenejme ještě transformační vztahy do polárních souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\varphi(t) \\ y &= r\cos\varphi(t) \\ \vec{v} &= \dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, 0) \\ \vec{v}^2 &= r^2\dot{\varphi}^2 \end{aligned} .$$

(a) $\dot{\vec{V}}(t) = \frac{d}{dt}(V, 0, 0) = \vec{0}$

$$L' = \frac{1}{2}m\vec{v}'^2 - m\vec{r}'\dot{\vec{V}} - U(\vec{r}') = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + mgr\cos\varphi$$

(b) $\dot{\vec{V}}(t) = \frac{d}{dt}(at, 0, 0) = (a, 0, 0)$

$$L' = \frac{1}{2}m\vec{v}'^2 - m\vec{r}'\dot{\vec{V}} - U(\vec{r}') = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\varphi}^2) - mar\sin\varphi + mgr\cos\varphi$$

(c) $\dot{\vec{V}}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(a\cos\omega t), 0, 0\right) = (-\omega^2 a\cos\omega t, 0, 0)$

$$L' = \frac{1}{2}m\vec{v}'^2 - m\vec{r}'\dot{\vec{V}} - U(\vec{r}') = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\varphi}^2) + \omega^2 mr\cos\omega t\sin\varphi + mgr\cos\varphi$$

(d) $\dot{\vec{V}}(t) = \frac{d}{dt}\left(0, \frac{d}{dt}(a\sin\omega t), 0\right) = (0, -\omega^2 a\sin\omega t, 0)$

$$L' = \frac{1}{2}m\vec{v}'^2 - m\vec{r}'\dot{\vec{V}} - U(\vec{r}') = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\varphi}^2) + \omega^2 mr\sin\omega t\cos\varphi + mgr\cos\varphi$$

(e) $\dot{\vec{V}}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(a\cos\omega t), \frac{d}{dt}(a\sin\omega t), 0\right) = (-\omega^2 a\cos\omega t, -\omega^2 a\sin\omega t, 0)$

$$L' = \frac{1}{2}m\vec{v}'^2 - m\vec{r}'\dot{\vec{V}} - U(\vec{r}') = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\varphi}^2) + \omega^2 mr\sin(\omega t + \varphi) + mgr\cos\varphi$$

Příklad 2.11

Hmotný bod se pohybuje působením tíže po svislé kružnici poloměru a. Byl vypuštěn s nulovou počáteční rychlostí z nejvyššího bodu kružnice. Určete polohu hmotného bodu v libovolném okamžiku, tj. určete $\varphi = \varphi(t)$.

Řešení: Počátek kartézského souřadného systému umístíme do středu kružnice, kladný směr osy y volíme proti směru tíhového pole a vzhledem k vazbě na kružnici volíme transformaci

$$\begin{aligned} x &= a\sin\varphi \\ y &= a\cos\varphi \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy = \frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2 - mga\cos\varphi.$$

Z obecné energie

$$E = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\dot{\varphi} - L = \frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2 + mga\cos\varphi$$

zjistíme E, neb víme, že v čase $t = 0$, kterému odpovídá $\varphi = 0$, bylo těleso vypuštěno s nulovou počáteční rychlostí, tedy

$$E = 0 + mga\cos 0 = mga.$$

Pomocí zákona zachování energie odvodíme pohybovou rovnici

$$\begin{aligned} mga &= \frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2 + mga\cos\varphi \\ 2\frac{g}{a}(1 - \cos\varphi) &= \dot{\varphi}^2 \\ 2\frac{g}{a}(1 - \cos^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2}) &= \dot{\varphi}^2 \\ 2\sqrt{\frac{g}{a}}\sin\frac{\varphi}{2} &= \dot{\varphi} \end{aligned}$$

a tuto rovnici budeme integrovat.

$$2\sqrt{\frac{g}{a}}t + 2\delta = \int \frac{d\varphi}{\sin \varphi/2} = \int \frac{\sin \varphi/2}{\sin^2 \varphi/2} d\varphi = \left\{ z = \cos \frac{\varphi}{2} \right\} =$$
$$= -2 \int \frac{dz}{1-z^2} = -2 \ \mathrm{argtgh}(z),$$

a tedy výsledek můžeme napsat jako

$$\tanh\left(\sqrt{\frac{g}{a}}t + \delta\right) = -\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Poznámka k výsledku ve skriptu: volbou úhlu $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$ dostaneme

$$-\cos\frac{\varphi}{2} = -\cos\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) =$$
$$= \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = tgh\left(\sqrt{\frac{g}{a}}t + \delta\right).$$

Příklad 2.11 □

Příklad 2.12

Ve vodorovné rovině může klouzat bez tření těleso hmotnosti m_1. Je spojeno nehmotnou tyčí délky r s tělesem hmotnosti m_2, které koná působením tíže kmitavý pohyb ve svislé rovině. Dokažte, že těleso m_2 se pohybuje po elipse, a vypočítejte dobu kmitu T tohoto eliptického kyvadla pro malé amplitudy.

Řešení: Kartézský souřadný systém zvolíme tak, že kladný směr osy y je ve směru tíhového pole vazby:

$$z_1 = z_2 = y_1 = 0$$

$$(x_2 - x_1)^2 + y_2^2 = r^2$$

Zvolíme nezávislé souřadnice podle vztahů

$$y_2 = r\cos\varphi$$
$$x_2 = x_1 + r\sin\varphi$$

$$\dot{y}_2 = -r\sin\varphi\dot{\varphi}$$
$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - r\cos\varphi\dot{\varphi} \quad .$$

Potom Lagrangeova funkce

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + m_2 g y_2$$

bude mít v těchto nových souřadnicích tvar

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}_1^2(m_1 + m_2) + m_2\dot{x}_1 r\cos\varphi\dot{\varphi} + \frac{1}{2}m_2 r^2\dot{\varphi}^2 + m_2 g r\cos\varphi$$

Abychom mohli při malých výchylkách určit periodu kmitů, aproximujeme Lagrangeovu funkci

$$\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2} \approx 1$$

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}\dot{x}_1^2(m_1 + m_2) + m_2\dot{x}_1 r\dot{\varphi} + \frac{1}{2}m_2 r^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}m_2 g r\varphi^2.$$

Potom budou mít Lagrangeovy rovnice mít tvar

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\varphi} = \frac{d}{dt}\left(m_2 r\dot{x}_1 + m_2 r^2\dot{\varphi}\right) + m_2 g r\varphi = m_2 r\ddot{x}_1 + m_2 r^2\ddot{\varphi} + m_2 g r\varphi = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{x}}\right) - \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\varphi} = \frac{d}{dt}\left((m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2 r\dot{\varphi}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 r\ddot{\varphi} = 0$$

a dostali jsme soustavu diferenciálních rovnic

$$\ddot{x}_1 + r\ddot{\varphi} + g\varphi = 0$$

$$\ddot{x}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}r\ddot{\varphi} = 0$$

odkud po úpravě dostaneme rovnici

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{r}\frac{m_1 + m_2}{m_1}\varphi = 0$$

která představuje rovnici harmonického $\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$oscilátoru s úhlovou frekvencí $\omega = \sqrt{\frac{g}{r}\frac{m_1+m_2}{m_1}}$ a protože $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ dostaneme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}\frac{m_1}{m_1 + m_2}}$$

nyní ještě stačí dokázat, že se m_2 pohybuje po elipse – zde je výhodné se vrátit k neaproximované Lagrangeově funkci a využít, že

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = \frac{d}{dt}\left((m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2 r\cos\varphi + \dot{\varphi}\right) = 0$$

je integrál pohybu a tedy

$$(m_1+m_2)\int dx_1 + m_2 r\int \cos\varphi d\varphi = C_1\int dt + C_2$$

$$(m_1+m_2)x_1 + m_2 r\sin\varphi = C_1 t + C_2$$

a protože chceme trajektorii hmotného bodu m_2, dosadíme za $x_1 = x_2 - r\sin\varphi$

$$(m_1+m_2)x_2 - m_1 r\sin\varphi = C_1 t + C_2$$

nyní eliminujeme φ – za tím účelem si vhodně vyjádříme předchozí rovnice

$$\frac{(m_1+m_2)x_2 - C_1 t - C_2}{m_1 r} = \sin\varphi$$

$$\frac{y_2}{r} = \cos\varphi$$

které umocníme na druhou a sečteme, čímž dostaneme hledanou rovnici elipsy

$$\frac{y_2^2}{r^2} + \frac{\left((m_1+m_2)x_2 - C_1 t - C_2\right)^2}{m_1^2 r^2} = 1$$

Příklad 2.12 □

Příklad 2.17

Přesvědčete se, že funkce $F_1(x,\dot{x},t) = \dot{x} + gt$a $F_2(x,\dot{x},t) = \dot{x}^2 + 2gx$ jsou první integrály rovnice $\ddot{x}+g=0$, kde g je konstanta. Vypočítejte pomocí nich $x = x(t)$.
Řešení: F je integrál rovnice $\ddot{x}+g=0$ právě když platí $\frac{d}{dt}F = 0$ a to použijeme:

$$\frac{d}{dt}F_1(x,\dot{x},t) = \ddot{x} + g = 0$$

$$\frac{d}{dt}F_2(x,\dot{x},t) = 2\dot{x}\ddot{x} + 2g\dot{x} = 2\dot{x}(\ddot{x}+g) = 0,$$

což bylo dokázati.

$x = x(t)$ vypočítáme pomocí těchto integrálů tak, že z první funkce vyjádříme $\dot{x} = F_1 - gt$ a dosadíme do druhé $F_2 = (F_1-gt)^2 + 2gx$ a z této jednoduché rovnice nám vyjde, že

$$x(t) = \frac{F_2 - (F_1-gt)^2}{2g} = -\frac{1}{2}gt^2 + F_1 t + \frac{F_2 - F_1}{2g}$$

Příklad 2.17 □

Příklad 2.18

Přesvědčete se, že funkce $F_1(x,\dot{x},t) = -\omega t + \arctan\left(\frac{\omega x}{\dot{x}}\right)$ a $F_2(x,\dot{x},t) = \frac{\dot{x}^2}{\omega^2} + x^2$ jsou první integrály rovnice $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, kde ω je kladná konstanta.

Řešení: Vypočítejte pomocí nich $x = x(t)$

$$\frac{d}{dt}F_1 = -\omega + \frac{\dot{x}^2}{\dot{x}^2 + \omega^2 x^2}\frac{\dot{x}^2 - x\ddot{x}}{\dot{x}^2}\omega = \omega\frac{-(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) + \dot{x}^2 - x\ddot{x}}{\dot{x}^2 + \omega^2 x^2} = -\omega x\frac{\ddot{x} + \omega^2 x}{\dot{x}^2 + \omega^2 x^2} = 0$$

$$\frac{d}{dt}F_2 = \frac{2\dot{x}\ddot{x}}{\omega^2} + 2x\dot{x} = 2\dot{x}\frac{\ddot{x} + \omega^2 x}{\omega^2} = 0$$

což bylo dokázati
a nyní odvodíme $x = x(t)$ tak, že z první funkce vyjádříme

$$\frac{\dot{x}}{\omega} = \frac{x}{tg(F_1 + \omega t)}$$

a dosadíme do druhé

$$F_2 = \frac{x^2}{tg^2(F_1 + \omega t)} + x^2 = x^2\frac{1 + tg^2(F_1 + \omega t)}{tg^2(F_1 + \omega t)} = x^2\frac{1}{\sin^2(F_1 + \omega t)}$$

čímž po úpravě dostaneme

$$x(t) = \sqrt{F_2}\sin(F_1 + \omega t)$$

Příklad 2.18 □

Příklad 2.22

Vypočtěte složky vektorů dostředivého, Eulerova a Coriolisova zrychlení v neinerciální soustavě S', která se otáčí kolem osy z' s předepsanou časovou závislostí úhlu otočení $\varphi = \varphi(t)$.

Řešení: Vektor otáčení okolo osy z :

$$\vec{\Omega} = (0, 0, \dot{\varphi}(t))$$

$$\dot{\vec{\Omega}} = (0, 0, \ddot{\varphi}(t))$$

dostředivé zrychlení $\vec{a}_d = -\vec{\Omega} \times (\vec{r'} \times \vec{\Omega}) = (-\dot{\varphi}^2 x',\ -\dot{\varphi}^2 y', 0)$
Eulerovo zdrchlení $\vec{a}_E = -\vec{r'} \times \dot{\vec{\Omega}} = (-\ddot{\varphi} y',\ -\ddot{\varphi} x', 0)$
Coriolisovo zrychlení $\vec{a}_C = -2\dot{\vec{r'}} \times \vec{\Omega} = (-2\dot{\varphi}\dot{y}',\ -2\dot{\varphi}\dot{x}', 0)$

Příklad 2.22 □

Příklad 2.23

Hmotný bod je vázán na polopřímku vycházející z počátku O inerciálního systému S souřadnic x_1, x_2, x_3. Polopřímka leží v roviněx_1, x_2a otáčí se vůči S s konstantní úhlovou rychlostí Ω. Hmotný bod o hmotnosti m je po přímce volně pohyblivý a nepůsobí na něj žádná skutečná síla. Pomocí Lagrangeovy funkce odvoďte jeho pohybovou rovnici a integrujte ji.

Řešení: Vazby a následné transformace tedy jsou

$$\begin{aligned} \varphi &= \Omega t + \varphi_0 \\ x_1 &= r\cos\varphi \\ x_2 &= r\sin\varphi \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\Omega^2)$$

a řešíme Lagrangeovu rovnici

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - m\Omega^2 r = m\ddot{r} - m\Omega^2 r = 0$$

dostali jsme diferenciální rovnici

$$\ddot{r} - \Omega^2 r = 0$$

jejímž řešení je

$$r(t) = A\cosh(\Omega t + \varphi_0)$$

Příklad 2.23 □

Příklad 2.24

Odvoďte rovnici pohybu hmotného bodu po kružnici poloměru R, která se otáčí konstantní úhlovou rychlostí Ω kolem svislé osy, ležící v rovině kružnice. Vzdálenost středu kružnice od osy otáčení je a. Soustava je v homogenním tíhovém poli. Při a = 0 diskutujte rovnovážné polohy bodu v závislosti na Ω.

Řešení: Počátek naší inerciální soustavy souřadné umístíme tak, že osa z je totožná s osou otáčení a kladný směr směřuje proti tíhovému poli, a zbylé dvě osy tvoří rovinu, ve které leží otáčející se střed kružnicenapišme Lagrangeovu funkci této soustavy

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

a vazby, kterým se soustava podřizuje

$$(x-a)^2 + z^2 = R^2$$

vzhledem k těmto vazbám i ke konstantní rychlosti otáčení kolem svislé osy zaveďme nové obecné souřadnice

$$\begin{aligned} x &= (a + R\sin\varphi)\cos\Omega t \\ y &= (a + R\sin\varphi)\sin\Omega t \\ z &= R\cos\varphi \end{aligned}$$

čímž Lagrangeova funkce dostane novou podobu

$$L = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\varphi}^2 + 2\Omega^2 aR\sin\varphi + \Omega^2 R^2\sin^2\varphi) - mgR\cos\varphi$$

a přistoupíme k napsání Lagrangeových rovnic II. druhu

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = mR^2\ddot{\varphi} - m\Omega^2 aR\cos\varphi - \Omega^2 R^2\sin\varphi\cos\varphi - mgR\sin\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} - \Omega^2\sin\varphi\cos\varphi - \frac{g}{R}\sin\varphi - \frac{\Omega^2 a}{R}\cos\varphi = 0$$

a nyní položme a $= 0$ a hledejme rovnovážné body z podmínky $\ddot{\varphi} = 0$

$$-\Omega^2\sin\varphi\cos\varphi - \frac{g}{R}\sin\varphi = 0$$

$$\sin\varphi\left(\cos\varphi + \frac{g}{R\Omega^2}\right) = 0$$

odkud dostáváme rovnovážné body jako

$$\varphi \in \left\{\pi\cdot Z,\ \ -\frac{g}{R\Omega^2}\right\}$$

Příklad 2.24 □