1 Reprezentace poloprostých Lieových algeber

Uvažujme $\mathfrak{g}$ nad $\mathbb{C}$, $\mathfrak{g}_0$ Caratnova podalgebra, $\alpha \in \Delta$, $T_\alpha \in \mathfrak{g}_0$, $[T_\alpha, T_\beta] = 0$, ρ reprezentace $\mathfrak{g}$ na komplexním vektorovém prostoru V, $\dim V < +\infty$, takže $\rho(g_0) = \{\rho(H) | H \in \mathfrak{g}_0\}$ je podprostor v $\mathcal{L}(V)$ tvořený komutujícími operátory. Potřebujeme ukázat, že jsou diagonální, abychom mohli napsat V jako $\dot{+}$ vlastních podprostorů.

$\alpha \in \Delta \quad \Rightarrow \quad \operatorname{span}\{X_\alpha, X_{-\alpha}, T_\alpha = [X_\alpha, X_{-\alpha}]\}$ podalgebra izomorfní $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \quad \Rightarrow \quad \rho(X_\alpha), \rho(X_{-\alpha}), \rho(T_\alpha)$ reprezentace $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ na V, ta je úplně reducibilní, tj. direktní součet ireducibilních reprezentací $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, v každé z nich působí $\rho(T_\alpha)$ diagonálně $\Rightarrow$ $\rho(T_\alpha)$ na V je diagonalizovatelný operátor $\Rightarrow$ $\rho(\mathfrak{g}_0)$ je množina komutujících diagonalizovatelných operátorů $\Rightarrow$ V lze rozložit na společné vlastní podprostory $\rho(\mathfrak{g}_0)$:

$$V = \dot{\sum_{\lambda \in \mathfrak{g}_0^*}} V_\lambda, \qquad V_\lambda = \bigcap_{H \in \mathfrak{g}_0} \ker\left(\rho(H) - \lambda(H)\mathbb{1}\right)$$

Definice 1.

- **Váhy** reprezentace ρ (na vekt. prostoru V) algebry $\mathfrak{h}$ nazýváme $\lambda \in \mathfrak{g}_0^*$, takové, že $V_\lambda \neq \{0\}$.
- Příslušné V_λ nazýváme **váhový podprostor** reprezentace ρ příslušný váze λ.
- **Váhový diagram** jsou váhy znázorněné v euklidovském $\mathbb{R}^n$ $\left(\lambda(T_\alpha) \in \mathbb{R},\ \text{tj. } \lambda \in \mathfrak{h}^\#\right)$.
- **Váhová mřížka** je $\mathcal{J} \subset \mathfrak{h}^\#$, $\mathcal{J} = \left\{\lambda \in \mathfrak{h}^\# \middle| \lambda(T_\alpha) \in \mathbb{Z},\ \forall \alpha \in \Delta\right\}$.

Poznámka 1. Pro adjugovanou reprezentaci ($\rho = \mathrm{ad}$) jsou nenulové váhy kořeny a V_0 je Cartanova podalgebra.

Poznámka 2. Mřížka je podgrupou $\mathfrak{h}^\#$: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{J}$, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 \in \mathcal{J}$. Její bázi tvoří $\lambda_j \in \mathfrak{h}^\#$, pro které $\lambda_j(T_{\alpha_k}) = \delta_{jk}$, $\forall \alpha_k \in \Delta^p \quad \Rightarrow \quad \forall \lambda \in \mathcal{J}$, $\exists m_1, \ldots, m_l$, $\lambda = \sum m_j \lambda_j$.

Věta 1. Mějme ρ reprezentaci komplexní poloprosté algebry. Nechť Λ_ρ je množina všech vah, $\Lambda_\rho = \left\{\lambda \in \mathfrak{g}_0^* \middle| \bigcap_{H \in \mathfrak{g}_0} \ker\left(\rho(H) - \lambda(H)\mathbb{1}\right) \neq 0\right\}$. Pak $\Lambda_\rho \subset \mathcal{J}$, $V = \dot{+}_{\lambda \in \Lambda_\rho} V_\lambda$ a Λ_ρ je invariantní vzhledem k Weylově grupě $\mathcal{W}_{\mathfrak{g}}$, tj. pokud $S \in \mathcal{W}_{\mathfrak{g}}$, $\lambda \in \Lambda_\rho \Rightarrow S(\lambda) \in \Lambda_\rho$ ($\forall \alpha \in \Delta$, $S_\alpha : \mathfrak{h}^\# \to \mathfrak{h}^\#$: $S_\alpha(\nu) = \nu - \nu(T_\alpha)\alpha$).
Dále $\forall \lambda \in \Lambda_\rho$, $\varepsilon = \operatorname{sgn} \lambda(T_\alpha)$, platí $\{\lambda, \lambda - \varepsilon\alpha, \ldots, \underbrace{\lambda - \lambda(T_\alpha)\alpha}_{S_\alpha(\lambda)}\} \subset \Lambda_\rho$ a $\dim V_\lambda = \dim V_{S_\alpha(\lambda)}$.

Důkaz. Už víme, že $V = \dot{+}_{\lambda \in \Lambda_\rho}$, $\sigma\left(\rho(T_\alpha)\right) \subset \mathbb{Z}$, protože je to $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \quad \Rightarrow \quad \Lambda_\rho \subset \mathcal{J}$.

Pro $\alpha \in \Delta$ označíme $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha := \operatorname{span}\{X_\alpha, X_{-\alpha}, T_\alpha\}$, vezmeme $0 \neq v \in V_\lambda$, $\forall H \in \mathfrak{h}$, $\rho(H)v = \lambda(H)v$, $\rho(X_{\pm\alpha})v \in V$:

$$\rho(H)\left(\rho(X_{\pm\alpha})v\right) = \rho\big(\underbrace{[H, X_{\pm\alpha}]}_{\pm\alpha(H)X_{\pm\alpha}}\big)v + \rho(X_{\pm\alpha})(\lambda(H)v) = (\lambda(H) \pm \alpha(H))\left(\rho(X_{\pm\alpha})v\right)$$

$\Rightarrow$ pokud $\rho(X_{\pm\alpha})v \neq 0$, pak $\lambda \pm \alpha \in \Lambda_\rho$, $\rho(X_{\pm\alpha})v \in V_{\lambda+\alpha}$.

$\lambda \in \Lambda_\rho \quad \Rightarrow \quad$ najdeme ireducibilní reprezentaci $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha$ na V takovou, že $\lambda|_{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha}$ je vahou této reprezentace $\Rightarrow \quad \rho(T_\alpha)v = \lambda(T_\alpha)v$, $\lambda(T_\alpha) \in \{-r, -r+2, \ldots, r\}$, tj.:

$$\{\lambda(T_\alpha), \lambda(t_\alpha) - \underbrace{\varepsilon\alpha(T_\alpha)}_{2\varepsilon}, \ldots, \lambda(T_\alpha) - 2\lambda(T_\alpha) = -\lambda(T_\alpha)\} \subset \{-r, \ldots, r\}$$

$\Rightarrow \quad \rho(E_{-\varepsilon\alpha})v, \left(\rho(E_{-\varepsilon\alpha})\right)^2 v, \ldots, \left(\rho(E_{-\varepsilon\alpha})\right)^{|\lambda(T_\alpha)|} v$ jsou díky vlastnostem ireducibilní reprezentace $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha$ nenulové vektory, ale tím pádem $V_{\lambda-\varepsilon\alpha}, \ldots, V_{\lambda-\lambda(T_\alpha)\alpha}$ jsou nenulové, tj. z jednoznačnosti váhových podprostorů ireducibilní reprezentace $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ vidíme, že pro LN vektory z V_λ máme různé ireducibilní reprezentace $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha$, každá zobrazuje jednoznačně $v \leftrightarrow \left(\rho(E_{-\varepsilon\alpha})\right)^{|\lambda(T_\alpha)|} v \in V_{S_\alpha(\lambda)} \quad \Rightarrow \quad \dim V_\lambda \leqslant \dim V_{S_\alpha(\lambda)}$. $S_\alpha^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad$ lze obrátit, máme tedy rovnost $\dim V_\lambda = \dim V_{S_\alpha(\lambda)}$. $\square$

Definice 2. Pro $\lambda \in \Lambda_\rho$, $n_\lambda := \dim V_\lambda$ nazýváme **násobnost váhy** λ.

Definice 3. $\lambda \in \Lambda_\rho$ je **dominantní** $\Leftrightarrow$ $\forall \alpha \in \Delta^+$, $\lambda(T_\alpha) \geqslant 0$ (tj. $\langle \lambda, \alpha \rangle \geqslant 0$).

Definice 4. $\lambda \in \Lambda_\rho$ je **nejvyšší** $\Leftrightarrow$ $\forall \alpha \in \Delta^+$, $\lambda + \alpha \notin \Lambda_\rho$.

Poznámka 3. Evidentně, každá reprezentace má nejvyšší váhu (alespoň jednu).

Definice 5. Pro $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ a její nejvyšší váhu λ zvolíme $v \in V_\lambda$, $v \neq 0$ a definujeme $R_\lambda := \mathrm{span}\{\rho(X_1) \dots \rho(X_k)v | k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ X_j \in \mathfrak{g}\}$, tj. $R_\lambda \subset\subset V$, $\rho(X)R_\lambda \subset R_\lambda$, $\forall X \in \mathfrak{g}$.

Věta 2. R_λ je invariantní podprostor reprezentace ρ, $\rho|_{R_\lambda} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(R_\lambda)$ je ireducibilní, $\dim R_\lambda \cap V_\lambda = 1$, tj. $R_\lambda \cap V_\lambda = \mathrm{span}\{v\}$.

Důkaz. V definici R_λ stačí uvažovat $X = E_\alpha$, $\alpha \in \Delta$ a $X = H$, $H \in \mathfrak{g}_0$. Uvažujme $\alpha, \dots, \omega \in \Delta$:

$$\rho(H)\big(\rho(E_\alpha)\dots\rho(E_\omega)v\big) = \big(\lambda(H) + \alpha(H) + \dots + \omega(H)\big)\big(\rho(E_\alpha)\dots\rho(E_\omega)v\big)$$
$$\uparrow$$
$$\rho\big([H, E_\alpha]\big) = \alpha(H)\rho(E_\alpha)$$

$\Rightarrow$ $\rho(E_\alpha)\dots\rho(E_\omega)v \in V_{\lambda+\alpha+\dots+\omega}$, tj. působení $\rho(H)$ je jen násobení číslem, stačí tedy uvažovat jen $X = E_\alpha$, $\alpha \in \Delta$. Vezmeme $w \in R_\lambda \cap V_\lambda, w = \sum_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_k \in \Delta \\ k \in \mathbb{N}\cup\{0\}}} konst.\, \rho(E_{\alpha_1})\dots\rho(E_{\alpha_k})v$, v každém členu má být váhový vektor s vahou λ $\Rightarrow$ $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 0$ $\Rightarrow$ některé jsou kladné, některé záporné. Kladné překomutujeme doprava pomocí $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}$, resp. $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = konst.\, H_\alpha$. Nakonec jsou všechny kladné kořeny napravo a protože $\alpha \in \Delta^+$ a z maximality λ, je $\rho(E_\alpha)v = 0$ $\Rightarrow$ v sumě jsou jen záporné kořeny, ale stále platí $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 0$ $\Rightarrow$ $k = 0$ $\Rightarrow$ $w = konst.\, v$ $\Rightarrow$ $\mathbb{R}_\lambda \cap V_\lambda = \mathrm{span}\{v\}$.

Ireducibilita sporem: Máme $W \subset\subset R_\lambda$, $W \cap (R_\lambda \cap V_\lambda) = \{0\}$, současně W musí být rozložitelný do váhových podprostorů $\Rightarrow$ má nenulový průnik s nějakým V_k, $k \neq \lambda$, $k \in \Lambda_{\rho|_{R_\lambda}}$, ozn. $W_k = W \cap V_k$, a $W = \dotplus W_k$. Z úplné reducibility vyplývá, že z $v \in V_\lambda$ se nelze dostat do W_k a z konstrukce $W_k \subset W \subset R_\lambda$ $\Rightarrow$ $W = \{0\}$. □

Důsledek 1. Ireducibilní reprezentace ρ poloprosté komplexní algebry na V s nejvyšší vahou λ, je nutně totožná s příslušným R_λ, tj. $V = R_\lambda$.

Věta 3. Buďte $\rho, \widetilde{\rho}$ ireducibilní reprezentace komplexní poloprosté Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ na $V, \widetilde{V}$ s nejvyšší vahou λ. Pak jsou reprezentace $\rho, \widetilde{\rho}$ ekvivalentní, tj. $\exists T : V \to \widetilde{V}$ lineární bijekce taková, že $\widetilde{\rho}(X) \circ T = T \circ \rho(X)$, $\forall X \in \mathfrak{g}$.

Důkaz. Z ireducibility $V = R_\lambda, \widetilde{V} = \widetilde{R}_\lambda$. Definujeme ∞-rozměrný prostor V^λ a reprezentaci $\mathfrak{g}$ na něm, tzv. Verma modul: $\mathrm{span}\,\{E_\alpha, E_{-\alpha} | \alpha \in \Delta^p\}$ generuje pomocí komutátorů celou algebru $\mathfrak{g}$, navíc $\forall \alpha, \beta \in \Delta^p$, $[E_\alpha, E_{-\beta}] = \delta_{\alpha\beta}T_\alpha$, $[E_\alpha, E_\beta] = \underbrace{N_{\alpha\beta}}_{\neq 0} E_{\alpha+\beta}$. Reprezentace je tedy určená působením $E_{\pm\alpha}$, $\alpha \in \Delta^p$. Označíme $\Delta^p = \{\alpha_j\}_{j=1}^l$, $E_{\pm j} := E_{\pm\alpha_j}$, v_0 abstraktní vektor,

$$V^\lambda := \mathrm{span}\left\{E_{-j_1}\dots E_{-j_k}v_0 \middle| j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, l\},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\},$$

$T_\alpha(v_0) \overset{!}{=} \lambda(T_\alpha)v_0$, $\forall \alpha \in \Delta$; $E_j(v_0) \overset{!}{=} 0$, $\forall j \in \{1, \dots, l\}$; $E_{-j}\left(E_{-j_1}\dots E_{-j_k}v_0\right) = E_{-j}E_{-j_1}\dots E_{-j_k}v_0$.

$$T_\beta\left(E_{-j_1}\dots E_{-j_k}v_0\right) = \left(\lambda(T_\beta) - \alpha_{j_1}(T_\beta) - \dots - \alpha_{-j_k}(T_\beta)\right)E_{-j_1}\dots E_{-j_k}v_0,$$

$$E_j\left(E_{-j_1}\dots E_{-j_k}v_0\right) = \delta_{jj_1}\underbrace{T_{\alpha_j}\left(E_{-j_2}\dots E_{-j_k}v_0\right)}_{\left(\lambda\left(T_{\alpha_j}\right) - \alpha_{j_2}\left(T_{\alpha_j}\right) - \dots - \alpha_{-j_k}\left(T_{\alpha_j}\right)\right)E_{-j_2}\dots E_{-j_k}v_0} +$$
$$+ \delta_{jj_2}E_{-j_1}\left(\lambda\left(T_{\alpha_j}\right) - \alpha_{j_3}\left(T_{\alpha_j}\right) - \dots - \alpha_{-j_k}\left(T_{\alpha_j}\right)\right)E_{-j_3}\dots E_{-j_k}v_0 +$$
$$+ \dots + \delta_{jj_k}\lambda\left(T_{\alpha_j}\right)E_{-j_1}\dots E_{-j_k}v_0.$$

Lze ukázat, že tímto způsobem máme definováno na V_λ působení $\mathrm{span}\{E_\alpha, E_{-\alpha} | \alpha \in \Delta^p\}$ indukující konzistentním způsobem reprezentaci $\mathfrak{g}$ na V^λ .

Nyní definujeme $\pi : V^\lambda \to R_\lambda,\ \tilde{\pi} : V^\lambda \to \tilde{R}_\lambda$:

$$\begin{aligned} \pi\left(E_{-j_1} \dots E_{-j_k} v_0\right) &= \rho\left(E_{-j_1}\right) \dots \rho\left(E_{-j_k}\right) v, \\ \tilde{\pi}\left(E_{-j_1} \dots E_{-j_k} v_0\right) &= \tilde{\rho}\left(E_{-j_1}\right) \dots \tilde{\rho}\left(E_{-j_k}\right) \tilde{v}. \end{aligned}$$

Z konstrukce V^λ je $\forall X \in \mathfrak{g},\ \rho(X) \circ \pi = \pi \circ X,\ \tilde{\rho}(X) \circ \tilde{\pi} = \tilde{\pi} \circ X \quad \Rightarrow \quad X \ker \pi = \ker \pi,\ \forall X \in \mathfrak{g}$, podobně $\tilde{\pi}$, tj. $\ker \pi,\ \ker \tilde{\pi}$ jsou invariantní podporostory V^λ a $\pi,\ \tilde{\pi}$ zobrazují váhové podporstory na váhové podprostory.

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(\ker \pi) &= \mathrm{span}\left\{\tilde{\pi}(V) | V \in \ker \pi, \text{ tj. } \pi(V) = 0\right\} \\ \tilde{\rho}(X)\left(\tilde{\pi}(\ker \pi)\right) &= \tilde{\pi}(X \ker \pi) \subset \tilde{\pi}(\ker \pi), \qquad \forall X \in \mathfrak{g} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \tilde{\pi}(\ker \pi)$ je invariantní podporstor reprezentace $\tilde{\rho}$, analogicky $\pi(\ker \tilde{\pi})$ je invariantni podprostor reprezentace ρ. $\pi\left(\mathrm{span}\{v_0\}\right) = \mathrm{span}\{v\},\ \left(V^\lambda\right)_\lambda = \mathrm{span}\{v_0\} \quad \Rightarrow \quad \pi|_{\left(V^\lambda\right)_\lambda} \to V_\lambda$ je bijekce $\quad \Rightarrow \quad \left(V^\lambda\right)_\lambda \not\subset \ker \pi,\ \tilde{V}_\lambda \not\subset \tilde{\pi}(\ker \pi) \quad \Rightarrow \quad \tilde{\pi}(\ker \pi) \neq \tilde{V} = \tilde{R}_\lambda \quad \Rightarrow \quad \tilde{\pi}(\ker \pi) = \{0\}$, analogicky $\pi(\ker \tilde{\pi}) = \{0\}$. Vidíme tedy, že $\pi\left(V^\lambda\right) = R_\lambda,\ \tilde{\pi}\left(V^\lambda\right) = \tilde{R}_\lambda$.

Definujeme $T : R_\lambda \to \tilde{R}_\lambda$ následovně: $T(w) \stackrel{!}{=} \tilde{\pi}(W),\ \forall w = \pi(W) \in R_\lambda$, kde $W \in V^\lambda$ (tj. w je libovolný prvek R_λ). Ověříme konzistenci: $W_0 \in \ker \pi,\ W' = W + W_0 \quad \Rightarrow \quad w = \pi(W')$

$$T(w) = \tilde{\pi}(W') = \tilde{\pi}(W + W_0) = \tilde{\pi}(W) + \underbrace{\tilde{\pi}(W_0)}_{=0} = \tilde{\pi}(W).$$

Evidentně k T existuje inverzní zobrazení záměnou π a $\tilde{\pi}$ v definici $\quad \Rightarrow \quad T$ je bijekce.

$$T\big(\rho(X)w\big) = T\big(\rho(X)\pi(W)\big) = T\big(\pi(XW)\big) = \tilde{\pi}(XW) = \tilde{\rho}(X)\tilde{\pi}(W) = \tilde{\rho}(X)T(w), \qquad \forall X \in \mathfrak{g}$$

$\Rightarrow \quad T \circ \rho(X) = \tilde{\rho}(X) \circ T,\ \forall X \in \mathfrak{g}$. □

Důsledek 2. Ireducibilní reprezentace ρ je určena svou nejvyšší vahou λ.

Definice 6. Mějme $\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}_0,\ \Delta \supset \Delta^+ \supset \Delta^p = \{\alpha_j\}_{j=1}^l$. Definujeme $\lambda_j \in \mathcal{J} \subset \mathfrak{h}^\# : \lambda_j\left(T_{\alpha_k}\right) = \delta_{jk}$. Takové λ_j nazýváme **fundamentální váhy** Lieovy algebry $\mathfrak{g}$, jim příslušející reprezentace nazýváme **fundamentální reprezentace**.

Poznámka 4. To, že $\lambda_j \in \mathcal{J}$ a že existují příslušné reprezentace je třeba ukázat.

Poznámka 5. Fundamentální váhy lze určit z Cartanovy matice vztahem $\lambda_j = \mathbb{M}_{jk}\alpha_k$, kde $\mathbb{M}_{jk} = (a_{jk})^{-1}$ inverze Cartanovy matice, neboť $\alpha_j = a_{jk}\lambda_k$:

$$a_{ik} = \alpha_i\left(T_{\alpha_k}\right) = a_{ij}\lambda_j\left(T_{\alpha_k}\right) = a_{ij}\delta_{jk} = a_{ik}.$$

Věta 4. Ke každé l-tici nezáporných celých čísel $m_1, \dots, m_l$ existuje právě jedna ireducibilní reprezentace poloprosté Lieovy algebry $\mathfrak{g}$, jejíž nejvyšší váha je $\lambda = \sum_{j=1}^l m_j \lambda_j$.

Důkaz. To že je nejvýše jedna už víme, existenci ukážeme konstrukcí na příkladech. □

1.1 Konstrukce reprezentací

Mějme $\mathfrak{g},\ V,\ \tilde{V},\ \rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V),\ \tilde{\rho} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}\left(\tilde{V}\right)$. Na $V \otimes \tilde{V}$ definujeme $\rho \otimes \tilde{\rho} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}\left(V \otimes \tilde{V}\right)$ takto:

$$\left(\rho \otimes \tilde{\rho}\right)(X) = \rho(X) \otimes \mathbb{1}|_{\tilde{V}} + \mathbb{1}|_V \otimes \tilde{\rho}(X), \qquad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Ověříme homomorfismus:

$$\begin{aligned}
[(\rho\otimes\widetilde{\rho})\,(X), (\rho\otimes\widetilde{\rho})\,(Y)]\,(v\otimes\widetilde{v}) &= (\rho\otimes\widetilde{\rho})\,(X)\big(\rho(Y)v\otimes\widetilde{v} + v\otimes\widetilde{\rho}(Y)\widetilde{v}\big)+\\
-\,(\rho\otimes\widetilde{\rho})\,(Y)\big(\rho(X)v\otimes\widetilde{v} + v\otimes\widetilde{\rho}(X)\widetilde{v}\big) &= \rho(X)\rho(Y)v\otimes\widetilde{v} + \cancel{\rho(Y)v\otimes\widetilde{\rho}(X)\widetilde{v}} + \cancel{\rho(X)v\otimes\widetilde{\rho}(Y)\widetilde{v}}+\\
+v\otimes\widetilde{\rho}(X)\widetilde{\rho}(Y)\widetilde{v} - \rho(Y)\rho(X)v\otimes\widetilde{v} &- \cancel{\rho(X)v\otimes\widetilde{\rho}(Y)\widetilde{v}} - \cancel{\rho(Y)v\otimes\widetilde{\rho}(X)\widetilde{v}} - v\otimes\widetilde{\rho}(Y)\widetilde{\rho}(X)\widetilde{v} =\\
&= \rho\big([X,Y]\big)v\otimes\widetilde{v} + v\otimes\widetilde{\rho}\big([X,Y]\big)\widetilde{v} = (\rho\otimes\widetilde{\rho})\big([X,Y]\big)v\otimes\widetilde{v}
\end{aligned}$$

$\mathfrak{g}$ komplexní poloprostá, $\Lambda_\rho,\ \Lambda_{\widetilde{\rho}},\ \lambda\in\Lambda_\rho,\ v\in V_\lambda,\ \mu\in\Lambda_{\widetilde{\rho}},\ \widetilde{v}\in\widetilde{V}_\mu$, pro $H\in\mathfrak{g}_0$ máme:

$$(\rho\otimes\widetilde{\rho})(H)v\otimes\widetilde{v} = \underbrace{\rho(H)v}_{\lambda(H)v}\otimes\widetilde{v} + v\otimes\underbrace{\widetilde{\rho}(H)\widetilde{v}}_{\mu(H)\widetilde{v}} = (\lambda+\mu)(H)v\otimes\widetilde{v}$$

$\Rightarrow\quad \lambda+\mu\in\Lambda_{\rho\otimes\widetilde{\rho}}$, speciálně pokud λ,μ jsou nejvyšší váhy, pak $\lambda+\mu$ je nejvyšší.

Příklad 1. $D^j\ \dots\ (2j+1)$-rozměrná reprezentace $\mathfrak{so}(3)$, tj. $j\in\frac{1}{2}\mathbb{N}_0$.

$$D^j\otimes D^k = D^{j+k}\oplus\cdots\oplus D^{|j-k|}\ \dots\ \text{Clebsh-Gordonův rozklad}$$

Symetrická, antysymetrická reprezentace: Mějme ρ na V algebru $\mathfrak{g}$, $\rho\otimes\rho$ na $V\otimes V = V^{\otimes 2}$, $S_{12}: V\otimes V\to V\otimes V: S_{12}(u\otimes v) = v\otimes u \quad\Rightarrow\quad S_{12}^2 = \mathbb{1} \quad\Rightarrow\quad \sigma(S_{12}) = \{\pm 1\}$.

$$\begin{aligned}
[S_{12},(\rho\otimes\rho)(X)](u\otimes v) &= S_{12}\big(\rho(X)u\otimes v + u\otimes\rho(X)v\big) - (\rho\otimes\rho)(X)(v\otimes u) =\\
&= v\otimes\rho(X)u + \rho(X)v\otimes u - \rho(X)v\otimes u - v\otimes\rho(X)u = 0, \quad \forall X\in\mathfrak{g}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow\quad [S_{12},(\rho\otimes\rho)(X)] = [S_{12},\rho(X)\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes\rho(X)] = 0,\ \forall X\in\mathfrak{g} \quad\Rightarrow\quad (\rho\otimes\rho)$ lze zúžit na vlastní podprostory S_{12}:

$$\begin{aligned}
V\otimes_S V &= \mathrm{span}\{u\otimes v + v\otimes u | u,v\in V\}\ \dots\ S_{12}|_{V\otimes_S V} = \mathbb{1}\\
V\wedge V &= \mathrm{span}\{u\otimes v - v\otimes u | u,v\in V\}\ \dots\ S_{12}|_{V\wedge V} = -\mathbb{1}
\end{aligned}$$

Nečť λ je nejvyšší a μ 2. nejvyšší váha ireducibilní reprezentace ρ na V, pak máme:

reprezentace:	nejvyšší váha:
$\rho\otimes_S\rho$ na $V\otimes_S V$	2λ
$\rho\wedge\rho$ na $V\wedge V$	$\lambda+\mu$

Příklad 2. $$\underset{\text{váhy:}}{D^1\otimes D^1} = \underset{5}{D^2}\oplus\underset{3}{D^1}\oplus\underset{1}{D^0} = \underbrace{\underset{6}{D^1\otimes_S D^1}}_{D^5\oplus D^1}\oplus\underbrace{\underset{3}{D^1\wedge D^1}}_{D^1}$$

Zobecnění: $\rho\otimes\rho\otimes\cdots\otimes\rho$ na $V\otimes V\otimes\cdots\otimes V = V^{\otimes k}$

$$\begin{gathered}
S_{ij}(u_1\otimes\cdots\otimes u_i\otimes\cdots\otimes u_j\otimes\cdots\otimes u_k) = u_1\otimes\cdots\otimes u_j\otimes\cdots\otimes u_i\otimes\cdots\otimes u_k\\
(\rho\otimes\cdots\otimes\rho)(X) = \rho(X)\otimes\mathbb{1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes\rho(X)\otimes\mathbb{1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{1} + \cdots + \mathbb{1}\otimes\cdots\otimes\mathbb{1}\otimes\rho(X)\\
[S_{ij},(\rho\otimes\cdots\otimes\rho)(X)] = 0
\end{gathered}$$

Neexistuje rozklad do $V^{\otimes k}$, $k>2$ do společných vlastních podprostorů S_{ij}, ale 2 spoločné vlastní podprostory vždy existují:

$$\begin{aligned}
V\otimes_S\cdots\otimes_S V &= V^{\otimes_S k}\ \dots\ S_{ij}|_{V^{\otimes_S k}} = \mathbb{1}\\
V\wedge\cdots\wedge V &= V^{\wedge k}\ \dots\ S_{ij}|_{V^{\wedge k}} = -\mathbb{1}
\end{aligned}$$

Příslušné reprezentace jsou $\rho^{\otimes_S k},\ \rho^{\wedge k}$. Pokud ρ je ireducibilní s vahami $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$, přičemž $\lambda_1(H_0) > \lambda_2(H_0)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_k(H_0)$, pak:

reprezentace:	nejvyšší váha:
$\rho^{\otimes_S k}$	$k\lambda_1$
$\rho^{\wedge k}$	$\lambda_1+\cdots+\lambda_k$ (po zohlednění násobností)

Poznámka 6. Mějme $\mathfrak{g}$, fundamentální váhy $\lambda_1, \dots, \lambda_l$, příslušlné fundamentální reprezentace ρ_j na V_j, $\lambda = \sum_j m_j \lambda_j$, $m_j \in \mathbb{N}_0$. Příslušnou ireducibilní reprezentaci najdeme v $(\rho_1)^{\otimes_S m_1} \otimes (\rho_2)^{\otimes_S m_2} \otimes \cdots \otimes (\rho_l)^{\otimes_S m_l}$. Nalezený R_λ, příslušející nejvyšší váze λ, je jednoznačně (až na násobek) určen tenzorovým součinem R_{λ_j} příslušných nejvyšším vahám $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ v $V_1, \dots, V_l$.