1. Implicitní zobrazení

Mějme soustavu nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} \Phi^1(x^1,\dots,x^r,y^1,\dots y^m) &= 0 \\ &\vdots \\ \Phi^m(\underbrace{x^1,\dots,x^r}_{x},\underbrace{y^1,\dots y^m}_{y}) &= 0 \end{aligned}.$$

Očekávám, že za jistých podmínek z této soustavy dostanu

$$\begin{aligned} y^1 &= \varphi^1(x^1,\dots,x^r) \\ &\vdots \\ y^m &= \varphi^m(x^1,\dots,x^r) \end{aligned}.$$

Definice 1.1. Buď $\Phi : \mathbb{R}^{r+m} \to \mathbb{R}^m$. Potom řešením rovnice $\Phi^j(x,y) = 0$, $j \in \widehat{m}$, rozumíme každé zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^m$ takové, že $\Phi(x,\varphi(x)) = 0$ pro každé $x \in \operatorname{Dom}\varphi$.

Poznámka. Říkáme, že φ je zadáno **implicitně**.

Věta 1.2 (o existenci a jednoznačnosti)**.** Buď $\Phi : \mathbb{R}^{r+m} \to \mathbb{R}^m$, $\Phi \in \mathcal{C}^q$, $q, r, m \in \mathbb{N}$ a platí:

(I) existuje $(x_0\ y_0) \in \operatorname{Dom}\Phi$ takové, že $\Phi(x_0\ y_0) = 0$,

(II)
$$\frac{\partial(\Phi^1,\dots,\Phi^m)}{\partial(y^1,\dots,y^m)}(x_0\ y_0) \neq 0.$$

Potom existuje okolí V_{x_0}, že rovnicí $\Phi(x,y) = 0$ je na V definováno právě jedno zobrazení $\varphi : \mathrm{V} \subset \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^m$ takové, že platí:

(1) $\varphi(x_0) = y_0$,
(2) $\varphi \in \mathcal{C}^q$,
(3) $\Phi(x,\varphi(x)) = 0$ na V_{x_0}.

Důkaz. Bude proveden v následující větě, která je obecnější. □

Poznámka. (1)

$$\left.\frac{\partial(\Phi^1,\dots,\Phi^m)}{\partial(y^1,\dots,y^m)}\right|_{(x_0,y_0)} = \left|\begin{matrix} \frac{\partial\Phi^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial\Phi^1}{\partial y^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\Phi^m}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial\Phi^m}{\partial y^m} \end{matrix}\right|_{(x_0,y_0)}$$

(2) Stačí $\Phi \in \mathcal{C}^0$, musí být třídy $\mathcal{C}^1$ vůči $y^1,\dots,y^m$. Pak $\varphi \in \mathcal{C}^0$.
(3) $\Phi(x^1,\dots,x^n,y)$ stačí $\Phi \in \mathcal{C}^0$ a monotonie vůči y.
(4) Buď $n \in \mathbb{N}$, $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n$ rostoucí r-tice, $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_m \le n$ rostoucí m-tice. Zaveďme $\lambda = (i_1,\dots,i_r)$, $\mu = (j_1,\dots,j_m)$, (λ,μ) je $(r+m)$-tice. Jestliže μ jsou zrovna takové, že λ doplní do $\widehat{n}$, pak označíme $\mu = \lambda'$. $(\lambda,\lambda') = (1,\dots,n)$.

Věta 1.3. Nechť $q, r, m \in \mathbb{N}$. Buď Φ zobrazení třídy $\mathcal{C}^q$ z $\mathbb{R}^{r+m} \to \mathbb{R}^m$ a platí:

(1) existuje $x_0 \in \operatorname{Dom}\Phi$ takové, že $\Phi(x_0) = 0$,
(2) $\mathrm{h}(\Phi'(x_0)) = m$.

Pak existuje okolí $\mathrm{H}_{x_0} \subset \mathbb{R}^{r+m}$, r-tice λ, okolí $\mathrm{V}_{x_0^\lambda} \subset \mathbb{R}^r$ a zobrazení $\varphi : \mathrm{V}_{x_0^\lambda} \to \mathbb{R}^m$ třídy $\mathcal{C}^q$ tak, že platí $\{x \in \mathrm{H}_{x_0} | \Phi(x) = 0\} = \{x \in \mathrm{H}_{x_0} | x^\lambda \in \mathrm{V}_{x_0^\lambda},\ x^{\lambda'} = \varphi(x^\lambda)\}$

Důkaz. Matice $\Phi'(x_0)$ má tvar

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial\Phi^1}{\partial x^{r+m}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\Phi^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial\Phi^m}{\partial x^{r+m}} \end{pmatrix}_{x=x_0}$$

Z hodnosti plyne existence $\lambda' = (j_1, \dots, j_m)$ taková, že

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial x^{j_1}} & \dots & \frac{\partial \Phi^1}{\partial x^{j_m}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi^m}{\partial x^{j_1}} & \dots & \frac{\partial \Phi^m}{\partial x^{j_m}} \end{vmatrix}_{x=x_0} \neq 0$$

a ze spojitosti $\forall x \in U_{x_0}$ je $\mathbb{J}(\Phi^{1,\dots,m}_{j_1,\dots,j_m})(x) \neq 0$.

Definujeme $f^\lambda(x) = x^\lambda$, $f^{\lambda'}(x) = \Phi(x)$. $f : \mathbb{R}^{r+m} \to \mathbb{R}^{r+m} \in \mathcal{C}^q$.

$$\mathbb{J}f(x_0) = \begin{vmatrix} \Phi^1_{j_1} & \dots & \Phi^1_{j_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \Phi^m_{j_1} & \dots & \Phi^m_{j_m} \end{vmatrix} \neq 0$$

(Plyne z rozvoje determinantu.) f splňuje předpoklady **??**, tedy existuje H_{x_0} takové, že $f|_{\mathrm{H}}$ je prosté, $f(\mathrm{H})$ je otevřené, $g = f^{-1} \in \mathcal{C}^q$.

$$\mathrm{V} = \{x^\lambda \in \mathbb{R}^r | (x^\lambda \; 0^{\lambda'}) \in f(\mathrm{H})\} = \mathrm{V}^\circ$$

$$\{x \in \mathrm{H} | \Phi(x) = 0\} = \{x \in \mathrm{H} | f(x) = (x^\lambda, 0^{\lambda'})\} = \{x \in \mathrm{H} | x = g(x^\lambda, 0^{\lambda'})\} =$$
$$= \{x \in \mathrm{H} | x^\lambda \in \mathrm{V},\; x^{\lambda'} = \varphi(x^\lambda)\}$$

a $\varphi(x^\lambda) = g^{\lambda'}(x^\lambda, 0^{\lambda'})$. □

Poznámka. Tvrzení věty zapsal Vrána i ve stručné podobě: $\exists H, \{x \in \mathrm{H} | \Phi(x) = 0\} \in \mathcal{C}^q$ a označil ho za „nejkrásnější vyjádření”. V tomto případě je množina považována za zobrazení (přesněji to je obraz zobrazení na H).

Poznámka. $\Phi(x) = \Phi^p(x^\lambda, x^{\lambda'})$, $p \in \widehat{m}$, $x^{\lambda'} = \varphi(x^\lambda)$, $\lambda = (i_1, \dots, i_r)$, $\lambda' = (j_1, \dots, j_m)$. $\Phi^p(x^\lambda, \varphi(x^\lambda)) = 0$, $x^\lambda \in \mathrm{V}$.

Pro pevně zvolené i_k, $k \in \widehat{r}$ a každé $p \in \widehat{m}$ platí:

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \Phi^p(x^\lambda, \varphi^{\lambda'}(x^\lambda)) = 0$$

$$\Phi^p_{i_k} + \sum_{l=1}^m \Phi^p_{j_l} \varphi^l_{i_k} = 0,$$

což je soustava lineárních rovnic pro $\varphi^l_{i_k}$ Z Cramerova pravidla pak dostáváme

$$\varphi^l_{i_k} = -\frac{\frac{\partial(\Phi^1,\dots,\Phi^m)}{\partial(x^{j_1},\dots,x^{j_{l-1}},x^{i_k},x^{j_{l+1}},\dots,x^{j_m})}}{\frac{\partial(\Phi^1,\dots,\Phi^m)}{\partial(x^{j_1},\dots,x^{j_m})}}.$$

Zapsáno „klasicky“:

$$\frac{\partial y^l}{\partial x^k} = -\frac{\frac{\partial(\Phi^1,\dots,\Phi^m)}{\partial(y^{j_1},\dots,y^{j_{l-1}},x^{i_k},y^{j_{l+1}},\dots,y^{j_m})}}{\frac{\partial(\Phi^1,\dots,\Phi^m)}{\partial(y^{j_1},\dots,y^{j_m})}}$$

Pokud už mám (x, y), pro které $\Phi(x, y) = 0$, můžu určit hodnotu derivace v tom bodě.