1. Neomezené operátory

Obecně $\operatorname{Dom} A \neq \mathcal{H}$, obvykle požadujeme $\overline{\operatorname{Dom} A} = \mathcal{H}$.

(1) $A = B \iff \operatorname{Dom} A = \operatorname{Dom} B \wedge Ax = Bx \ \forall x \in \operatorname{Dom} A$,
(2) $C = AB$: $\operatorname{Dom} C = \{x \in \operatorname{Dom} B | Bx \in \operatorname{Dom} A\}$, $Cx = ABx \ \forall x \in \operatorname{Dom} C$,
(3) $C = A + B$: $\operatorname{Dom} C = \operatorname{Dom} A \cap \operatorname{Dom} B$.

Definice 1. Nechť $\overline{\operatorname{Dom} A} = \mathcal{H}$. Potom $x \in \operatorname{Dom} A^*$, právě když existuje $u \in \mathcal{H}$ tak, že pro každé $y \in \operatorname{Dom} A$ je $(x, Ay) = (u, y)$. Jestliže $u \in \mathcal{H}$ existuje, pak je určeno jednoznačně: Kdyby existovalo $u' \in \mathcal{H}$ tak, že pro každé $y \in \operatorname{Dom} A$ $(x, Ay) = (u', y)$, pak pro každé $y \in \operatorname{Dom} A$ je $(u - u', y) = 0$ a $u - u' \in \operatorname{Dom} A^{\perp} = (\overline{\operatorname{Dom} A})^{\perp} = \{0\}$. Pokládáme $A^* x = u$.

Tvrzení 2. *Platí:*

(i) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$ *(*$\lambda \neq 0$*);*
(ii) $(A+B)^* \supset A^* + B^*$*, pokud je levá strana definovaná (*$\overline{\operatorname{Dom}(A+B)} = \overline{\operatorname{Dom} A \cap \operatorname{Dom} B} = \mathcal{H}$*);*
(iii) $(AB)^* \supset B^* A^*$*, pokud je levá strana definovaná (*$\operatorname{Dom} AB = \mathcal{H}$*);*
(iv) $A \subset B \implies B^* \subset A^*$.

Důkaz. (1) Buď $x \in \operatorname{Dom} A^* = \operatorname{Dom}(\lambda A^*)$ (platí pro $\lambda \neq 0$). Pro $y \in \operatorname{Dom}(\lambda A)$ platí

$$(x, (\lambda A) y) = (x, \lambda (Ay)) = \lambda (x, Ay) = \lambda (A^* x, y) = (\overline{\lambda} A^* x, y),$$

z čehož plyne $x \in \operatorname{Dom}(\lambda A)^*$, díky jednoznačnosti $\overline{\lambda} A^* x = (\lambda A)^* x$ a $\overline{\lambda} A^* \subset (\lambda A)^*$.

Naopak buď $x \in \operatorname{Dom}(\lambda A)^*$, pak

$$(\overline{\lambda} x, Ay) = (x, \lambda A y) = ((\lambda A)^* x, y).$$

Proto $x \in \operatorname{Dom}(\overline{\lambda} A^*)$ a $(\lambda A)^* \subset \overline{\lambda} A^*$. Celkem $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$.

(2) Buď $x \in \operatorname{Dom}(A^* + B^*)$, tedy $x \in \operatorname{Dom} A^* \cap \operatorname{Dom} B^*$, $y \in \operatorname{Dom}(A + B)$. Pak

$$(x, (A+B) y) = (x, Ay) + (x, By) = (A^* x, y) + (B^* x, y) = ((A^* + B^*) x, y).$$

(3) Buď $x \in \operatorname{Dom}(B^* A^*) \iff x \in \operatorname{Dom} B^* \wedge A^* x \in \operatorname{Dom} B^*$. Pro každé $y \in \operatorname{Dom}(AB)$, tj. $y \in \operatorname{Dom} B$, $By \in \operatorname{Dom} A$ platí

$$(x, (AB) y) = (x, A(By)) = (A^* x, By) = (B^* (A^* x), y) = (B^* A^* x, y).$$

Proto $x \in \operatorname{Dom}(AB)^*$, $(AB)^* x = (B^* A^*) x$ a $B^* A^* \subset (AB)^*$.

(4) Buď $x \in \operatorname{Dom} B^*$. Pro $y \in \operatorname{Dom}(A) \subset \operatorname{Dom}(B)$ platí

$$(x, Ay) = (x, By) = (B^* x, y)$$

a $x \in \operatorname{Dom} A^*$, $A^* x = B^* x \implies B^* \subset A^*$. □

Věta 3. *Nechť* $\overline{\operatorname{Dom} A} = \mathcal{H}$*,* A^{-1} *existuje (*$\operatorname{Ker} A = 0$*) a* $\overline{\operatorname{Dom} A^{-1}} = \mathcal{H}$ *(*$\operatorname{Dom} A^{-1} = \operatorname{Ran} A$*). Potom* $(A^*)^{-1}$ *existuje a platí* $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Důkaz. (1) Buď $x \in \operatorname{Ker} A^*$. Potom pro každé $y \in \operatorname{Dom} A$ je $(x, Ay) = (0, y) = 0$. Protože $Ay \subset \operatorname{Ran} A = \operatorname{Dom} A^{-1}$, který je hustý, je $x = 0$, tj. $\operatorname{Ker} A^* = \{0\}$ a tedy $(A^*)^{-1}$ existuje.

(2) Buď $y \in \operatorname{Dom}(A^{-1}) = \operatorname{Ran} A$, $y = Au$, $u \in \operatorname{Dom} A$, $(x, A^{-1} y) = (x, u)$.

Pro každé $u \in \operatorname{Dom} A$, $x \in \operatorname{Dom}(A^*)^{-1}$ je

$$(x, A^{-1} A u) = (x, u) = (A^* (A^*)^{-1} x, u) = ((A^*)^{-1} x, Au).$$

Pro $y \in \operatorname{Dom}(A^{-1})$, $x \in \operatorname{Dom}(A^*)^{-1}$ je $(x, A^{-1} y) = ((A^*)^{-1} x, y)$, tudíž $x \in \operatorname{Dom}(A^{-1})^*$ a $(A^{-1})^* x = (A^*)^{-1} x$.

(3) Buď $y \in \operatorname{Dom}(A^{-1})^*$, $x \in \operatorname{Dom} A^{-1}$. Potom

$$((A^{-1})^* y, A A^{-1} x) = ((A^{-1})^* y, x) = (y, A^{-1} x).$$

Pro $y \in \operatorname{Dom}(A^{-1})^*$, $z \in \operatorname{Dom} A$ je $((A^{-1})^* y, Az) = (y, z)$. Proto $(A^{-1})^* y \in \operatorname{Dom} A^*$, $A^* (A^{-1})^* y = y \in \operatorname{Ran} A^* = \operatorname{Dom}(A^*)^{-1}$, $(A^*)^{-1} y = (A^{-1})^* y$ a $(A^{-1})^* \subset (A^*)^{-1}$. Celkem $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$. □

Poznámka. (1) $A = \overline{A} \implies \overline{\operatorname{Ker} A} = \operatorname{Ker} A$.

(2) Je-li $\overline{\operatorname{Dom} A} = \mathcal{H}$, potom $\operatorname{Ran}(A - \lambda I)^\perp = \operatorname{Ker}(A^* - \overline{\lambda} I)$.

Důkaz. $x \in \operatorname{Ran}(A - \lambda I)^\perp \iff (x, (A - \lambda I)y) = 0 \ \forall y \in \operatorname{Dom} A \iff x \in \operatorname{Ker}(A^* - \overline{\lambda} I)$. $\square$

(3) Jestliže $\overline{\operatorname{Dom} A} = \mathcal{H}$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, pak $(A + B)^* = A^* + B^*$ a $\operatorname{Dom}(A + B) = \operatorname{Dom}(A)$. Specielně $(A - \lambda I)^* = A^* - \overline{\lambda} I$.

(4) Je-li $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, pak $A^{**} = A$. Je-li A neomezený, potom A^{**} existuje, právě když $\overline{\operatorname{Dom} A^*} = \mathcal{H}$; potom $A^{**} = \overline{A}$.

(5) $\Gamma(\overline{A}) = \overline{\Gamma(A)}$, $\Gamma(A) \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Definujeme $([x, y], [x', y']) = (x, x') + (y, y')$, $\|[x, y]\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$. Označme $U : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} : [x, y] \mapsto [y, -x]$. Zřejmě $U^2 = -I$, $U^* = U^{-1} = -U$.

(6) Buď $M \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Pak $U(M)^\perp = U(M^\perp)$:

$$\begin{aligned} [x, y] \in U(M)^\perp &\iff \forall [u, v] \in U(\Gamma) : ([x, y], [u, v]) = 0 \\ &\iff \forall [u, v] \in \Gamma : ([x, y], [v, -u]) = 0 \\ &\iff (x, v) - (y, u) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [x, y] \in U(M^\perp) &\iff [-y, x] \in \Gamma^\perp \\ &\iff \forall [u, v] \in M([-y, x], [u, v]) = 0 \\ &\iff -(y, u) + (x, v) = 0. \end{aligned}$$

Lemma 4. *Nechť* $\overline{\operatorname{Dom} A} = \mathcal{H}$. *Potom* $\Gamma(A^*) = U(\Gamma(A))^\perp$.

Důkaz.

$$\begin{aligned} [x, y] \in \Gamma(A^*) &\iff \forall u \in \operatorname{Dom} A : (x, Au) = (y, u) \\ &\iff \forall [u, Au] \in \Gamma(A) : ([x, y], \underbrace{[Au, -u]}_{U[u, Au]}) = 0 \\ &\iff \forall [u, v] \in \Gamma(A) : ([x, y], U[u, v]) = 0 \\ &\iff [x, y] \in U(\Gamma(A))^\perp. \quad \square \end{aligned}$$

Důsledek. A^* *je uzavřený, neboť* $\Gamma(A^*) = \overline{\Gamma(A^*)}$.

Věta 5. *Nechť* $\overline{\operatorname{Dom} A} = \mathcal{H}$. *Potom* $A^{**} = (A^*)^*$ *existuje, právě když* A *je uzavíratelný a navíc* $A^{**} = \overline{A}$.

Důkaz. A^{**} existuje $\iff \overline{\operatorname{Dom} A^*} = \mathcal{H} \iff \operatorname{Dom}(A^*)^\perp = \{0\}$. Dále

$$\begin{aligned} [x, 0] \in \Gamma(A^*)^\perp &\iff \forall [u, v] \in \Gamma(A^*) : 0 = ([x, 0], [u, v]) = (x, u) \\ &\iff x \in \operatorname{Dom}(A^*)^\perp \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Dom}(A^*)^\perp &\iff [x, 0] \in \Gamma(A^*)^\perp = U(\Gamma(A))^{\perp\perp} = \overline{U(\Gamma(A))} = U(\overline{\Gamma(A)}) \\ &\iff -U[x, 0] \in \overline{\Gamma(A)} \\ &\iff [0, x] \in \overline{\Gamma(A)}. \end{aligned}$$

Z toho plyne

$$\begin{aligned} \exists A^{**} &\iff \overline{\operatorname{Dom} A^*} = \mathcal{H} \iff \operatorname{Dom}(A^*)^\perp = \{0\} \\ &\iff \{x \in \mathcal{H} | [0, x] \in \overline{\Gamma(A)}\} = \{0\} \\ &\iff \overline{\Gamma(A)} \text{ je graf} \\ &\iff A \text{ je uzavíratelný}. \end{aligned}$$

Konečně

$$\Gamma(A^{**}) = U(\Gamma(A^*))^\perp = U(\Gamma(A^*)^\perp) = U(\overline{U(\Gamma(A))}) = U^2(\overline{\Gamma(A)}) = \overline{\Gamma(A)} = \Gamma(\overline{A}).$$

Přitom jsme využili toho, že $\overline{\Gamma(A)}$ je podprostor, takže $(-1)\overline{\Gamma(A)} = \overline{\Gamma(A)}$. $\square$

Definice 6. Nechť A je hustě definovaný. Potom

(1) A je symetrický, právě když (ekvivalentní formulace)
   (a) $(\forall x, y \in \operatorname{Dom} A)((Ax, y) = (x, Ay))$,
   (b) $(\forall x \in \operatorname{Dom} A)(x \in \operatorname{Dom} A^*,\ A^*x = Ax)$,
   (c) $A \subset A^*$.
(2) A je samosdružený, právě když $A^* = A$.
(3) A je normální, právě když $A^*A = AA^*$ (včetně definičních oborů).

Věta 7. *(1) Symetrický operátor je uzavíratelný.*
(2) Uzávěr symetrického operátoru je symetrický.
(3) Je-li A symetrický a $\operatorname{Dom} A = \mathcal{H}$, potom A je omezený.

Důkaz. (1) $A \subset A^*$, A^* je uzavřený.
(2) $A \subset A^* \implies \overline{A} \subset A^* = (\overline{A})^*$. Obecně pro každý $B : \overline{\operatorname{Dom} B} = \mathcal{H}$, uzavíratelný, platí $B^* = (\overline{B})^*$.

$$\Gamma(B^*) = U(\Gamma(B))^\perp = (\overline{U(\Gamma(B))})^\perp = (U(\overline{\Gamma(B)}))^\perp = U(\Gamma(\overline{B}))^\perp = \Gamma((\overline{B})^*).$$

Druhá rovnost zleva plyne ze spojitosti skalárního součinu, třetí z unitarity U a čtvrtá z uzavíratelnosti B.
(3) $A \subset \overline{A}$ existuje, $\operatorname{Dom} A = \mathcal{H}$, takže $A = \overline{A}$ a A je omezený. $\square$