1 Řešení speciálních typů rovnic

1.1 Geometrická interpretace rovnice $y' = f(x, y)$

Poznámka 1.1. Mějme diferenciální rovnici ve tvaru

$$y' = f(x, y), \tag{1.1}$$

kde funkce f je definovaná na nějaké oblasti $\mathrm{Dom}(f) \subset \mathbb{R}^2$. O takové rovnici říkáme, že je v *normálním tvaru*.

Rovnici lze geometricky chápat tak, že každému bodu $\binom{x}{y} \in \mathrm{Dom}(f)$ je přiřazena hodnota $f(x, y)$, která je směrnicí jisté přímky procházející tímto bodem. Je-li funkce $y = y(x)$ řešení rovnice (1.1), příslušná integrální křivka má tu vlastnost, že její tečna v bodě $\binom{x}{y(x)}$ je totožná s přímkou, jejíž směrnice je $f(x, y(x))$ a která tímto bodem prochází.

Definice 1.2. Mějme diferenciální rovnici ve tvaru (1.1). Nechť $\Gamma = \mathrm{Dom}(f) \subset \mathbb{R}^2$. Pak množina $\left\{\binom{1}{f(x,y)} \mid \binom{x}{y} \in \Gamma\right\}$ se nazývá **směrové pole**.

Poznámka 1.3. Dle předchozí definice můžeme znároznit směrové pole tak, že do každého bodu $\binom{x}{y} \in \Gamma$ umístíme vektor $\binom{1}{f(x,y)}$. V zájmu přehlednosti však směrové pole reprezentujeme jiným způsobem. Do každého bodu $\binom{x}{y} \in \Gamma$ umístíme krátkou úsečku se středem v bodě $\binom{x}{y}$, jejíž směrnice je rovna hodnotě $f(x, y)$. Na délku úsečky pak klademe jen ten požadavek, aby takto vzniklý obrázek byl přehledný.

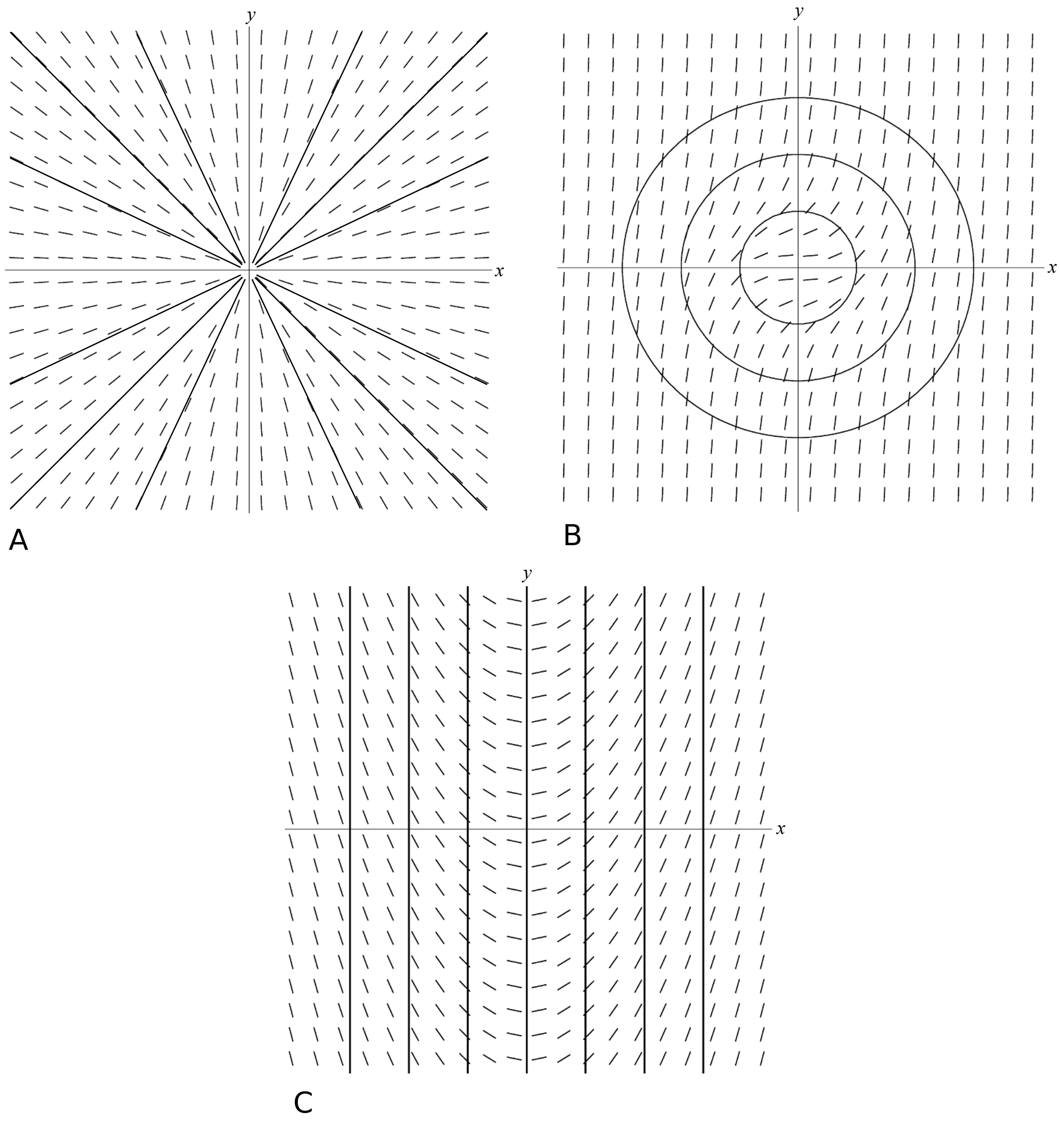
Definice 1.4. Mějme diferenciální rovnici ve tvaru (1.1), $\Gamma = \mathrm{Dom}(f) \subset \mathbb{R}^2$. Nechť dále platí $\big(\exists C \in \mathbb{R}\big)\big(\exists \binom{x_0}{y_0} \in \Gamma\big)\big(f(x_0, y_0) = C\big)$. Pak množina $\left\{\binom{x}{y} \in \Gamma \mid f(x, y) = C\right\}$ se nazývá **izoklinická křivka**.

Příklad 1.5. Zakreslíme směrové pole a izoklinické křivky následujících rovnic (směrové pole zakreslíme pro přehlednost ve stylu poznámky 1.3):

a) $y' = y/x$, kde $\Gamma = \mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0\}$. Směrové pole je v tomto případě podle definice množina $\left\{\binom{1}{y/x} \mid \binom{x}{y} \in \Gamma\right\}$. Izoklinické křivky jsou dány rovnicí $y = Cx$, $C \in \mathbb{R}$. Protože $x \neq 0$ můžeme si ty křivky představit jako polopřímky začínající v počátku. Samotný počátek, však na těchto křivkách neleží. Směrové pole a několik izoklinických křivek je zachyceno na obr. 1.1A.

b) $y' = x^2 + y^2$, kde $\Gamma = \mathbb{R}^2$. Zde směrové pole je množina $\left\{\binom{1}{x^2+y^2} \mid \binom{x}{y} \in \Gamma\right\}$ a izoklinické křivky jsou kružnice se středem v počátku dané rovnicí $x^2 + y^2 = C$, kde $C \in \mathbb{R}$. Snadno se přesvědčíme, že obrázek směrového pole podle definice 1.2 by byl v tomto případě velmi nepřehledný. Směrové pole a vybrané izoklinické křivky k této rovnici jsou znázorněny na obr. 1.1B.

c) $y' = x$, kde $\Gamma = \mathbb{R}^2$. Směrové pole u této rovnice je množina $\left\{\binom{1}{x} \mid \binom{x}{y} \in \Gamma\right\}$. Izoklinické křivky jsou vertikály s rovnicí $x = C$, kde $C \in \mathbb{R}$. Situace je zachycena na obr. 1.1C.



Obrázek 1.1: Směrová pole a izoklinické křivky příslušné k daným diferenciálním rovnicím. **A** k rovnici $y' = y/x$, **B** k rovnici $y' = x^2 + y^2$, **C** k rovnici $y' = x$.

Poznámka 1.6. Máme-li diferenciální rovnici ve tvaru (1.1) a chceme-li zakreslit její směrové pole, můžeme v zásadě postupovat dvěma způsoby. První způsob lze shrnout do následujícího schématu:

1. Vybereme body $\binom{x}{y}$, v nichž chceme spočítat sklony.
2. Pro každý z vybraných bodů spočteme příslušný sklon C podle vztahu $C = f(x, y)$.
3. Do vybraných bodů zakreslíme úsečky s patřičným sklonem.

S tímto přístupem se zpravidla setkáme, pokud k vykreslení směrového pole používáme počítač. Můžeme si všimnout, že v předchozím příkladě byla použita právě tato metoda.

V případě, že potřebujeme vykreslit směrové pole efektivněji (např. pokud jej potřebujeme vykreslit ručně), volíme raději druhý způsob. Ten spočívá v tom, že

1. Zvolíme si sklon C.
2. Najdeme příslušné izoklinické křivky, tj. vyřešíme rovnici $f(x, y) = C$.
3. Podél nalezené křivky zakreslíme úsečky s příslušným sklonem.
4. Postup zopakujeme pro další hodnotu C, dokud nejsme s výsledkem spokojeni.

1.2 Rovnice se separovanými proměnnými

Definice 1.7. Nechť $P = P(x)$, $Q = Q(y)$ jsou spojité funkce. Pak rovnice 1. řádu ve tvaru

$$P(x) + Q(y)y' = 0 \tag{1.2}$$

se nazývá **rovnice se separovanými proměnnými**.

Poznámka 1.8 (**Formální postup**). Mějme rovnici (1.2), kterou zapíšeme ve tvaru

$$P(x) + Q(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0.$$

Tuto rovnici bychom chtěli upravit tak, že ji vynásobíme výrazem $\mathrm{d}x$. Vznikla by následující rovnice

$$P(x)\mathrm{d}x + Q(y)\mathrm{d}y = 0.$$

Problém této úpravy ovšem je, že není platná. Výraz $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ totiž není zlomek, nýbrž nedělitelný symbol. Nicméně, pokud by bylo možné úpravu provést, dostali bychom se k výše uvedené rovnici. Levou stranu této rovnice bychom mohli chápat jako diferenciál $\mathrm{d}G$ nějaké funkce $G = G(x, y)$. Přitom by zřejmě muselo platit

$$P(x) = \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} \qquad \text{a} \qquad Q(y) = \frac{\partial G(x,y)}{\partial y}.$$

Integrací rovnosti $\mathrm{d}G = 0$ dostáváme $G(x, y) = \text{konst.}$, tedy

$$G(x,y) = \int P(x)\mathrm{d}x + \int Q(y)\mathrm{d}y = \text{konst.},$$

což lze chápat jako zápis implicitně zadané funkce $y = y(x)$, která by při splnění určitých podmínek byla řešením rovnice (1.2). Jak to tedy s řešením rovnice (1.2) je, nám prozradí následující dvě věty.

Věta 1.9. *Nechť $P = P(x)$ je spojitá na $I = (a, b)$ a $Q = Q(y)$ je spojitá na $J = (c, d)$. Pak platí*

(I) *$\forall y = y(x)$, kde y je řešení (1.2) na $I_1 \subset I$, splňuje funkce y na I_1 také rovnost*

$$\int P(x)\mathrm{d}x + \int Q(y)\mathrm{d}y = C \tag{1.3}$$

pro nějaké $C \in \mathbb{R}$.

(II) *$\big(\exists C \in \mathbb{R}\big)\big(\exists I_2 \subset I\big)\big(\forall y : I_2 \to \mathbb{R}, y'\ ex.\big)$ platí $\int P(x)\mathrm{d}x + \int Q(y)\mathrm{d}y = C \implies y$ na I_2 splňuje rovnici (1.2).*

Důkaz.

(I) Máme tedy funkci u, která řeší na $I_1 \subset I$ rovnici (1.2). Tzn. u je na I_1 spojitá a diferencovatelná a platí

$$\Big(\forall x \in I_1\Big)\Big(P(x) + Q\big(u(x)\big)u'(x) = 0\Big).$$

Integrací tohoto vztahu dostaneme

$$\int P(x)\mathrm{d}x + \int Q\big(u(x)\big)u'(x)\mathrm{d}x = C \quad \text{pro každé } x \in I_1,$$

kde C je integrační konstanta. Podle věty o integraci substitucí platí $\int Q\big(u(x)\big)u'(x)\mathrm{d}x = \big[\int Q(y)\mathrm{d}y\big]_{y=u(x)}$. Tzn. předchozí rovnost lze psát ve tvaru

$$\int P(x)\mathrm{d}x + \left[\int Q(y)\mathrm{d}y\right]_{y=u(x)} = C \quad \text{pro každé } x \in I_1,$$

což jsme chtěli dokázat.

(II) Máme nějakou funkci $y(x)$, která je na $I_2 \subset I$ diferencovatelná a splňuje zde pro nějaké $C \in \mathbb{R}$ rovnici

$$\underbrace{\left[\int P(x)\mathrm{d}x\right]}_{H(x)} + \underbrace{\left[\int Q(y)\mathrm{d}y\right]}_{S(y)} = C.$$

Tato rovnost platí pro každé $x \in I_2$ a s daným označením ji lze zapsat ve tvaru $H(x) + S\big(y(x)\big) = C$ pro všechna $x \in I_2$. Funkce H a S jsou zřejmě diferencovatelné (jsou to primitivní funkce k P a Q), a proto můžeme uvedenou rovnost derivovat. Tím dostaneme

$$\underbrace{H'(x)}_{P(x)} + \underbrace{S'\big(y(x)\big)}_{Q(y(x))} y'(x) = 0 \quad \text{pro každé } x \in I_2.$$

Dostali jsme se tedy k rovnosti $P(x) + Q\big(y(x)\big)y'(x) = 0$ pro každé $x \in I_2$, tj. funkce y řeší na I_2 rovnici (1.2), což jsme chtěli dokázat. $\square$

Věta 1.10. *Nechť P je spojitá na $I = (a, b)$, Q je spojitá na $J = (c, d)$ a $Q(y) \neq 0$ na J. Pak $\forall \binom{x_0}{y_0} \in I \times J$ existuje právě jedno řešení (1.2) tak, že $y(x_0) = y_0$.*

Důkaz. Označme $H(x) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x)\mathrm{d}x$ a $S(y) = \int\limits_{y_0}^{y} Q(y)\mathrm{d}y$.

(I) Ukažme nejdříve existenci řešení. Z definice funkcí H a S je zřejmé, že $H(x_0) = 0$ a $S(y_0) = 0$. Uvažme obecný implicitní vztah (1.3) z předchozí věty, který lze při zavedeném označení psát ve tvaru

$$H(x) + S(y) = C, \quad \text{kde } C \in \mathbb{R}.$$

Zkoumáme, zda nám tento vztah za daných předpokladů implicitně definuje nějakou funkci $y = y(x)$. Na funkci y přitom klademe ten požadavek, aby $y(x_0) = y_0$. Z toho ovšem plyne, že požadujeme

$$\underbrace{H(x_0)}_{=0} + \underbrace{S(y_0)}_{=0} = C,$$

což lze splnit jen pro $C = 0$. Máme tedy implicitní vztah $H(x) + S(y) = 0$, funkce H a S jsou diferencovatelné na svých definičních oborech a navíc platí $S'(y) = Q(y) \neq 0$ na J. Tím jsme splnili předpoklady věty o implicitní funkci [?, Věta 13.5], a tedy existuje funkce $y = y(x)$ taková, že splňuje rovnici $H(x) + S\big(y(x)\big) = 0$. To ale podle předchozí věty znamená, že splňuje i rovnici (1.2), což jsme chtěli dokázat.

(II) Dokažme jednoznačnost ve smyslu poznámky ??. Nechť y_1 a y_2 jsou řešení (1.2) na I_1 a I_2 a nechť $x_0 \in I_1 \cap I_2$. Platí tedy

$$\begin{aligned} P(x) + Q\big(y_1(x)\big)y_1'(x) &= 0 \qquad x \in I_1, \\ P(x) + Q\big(y_2(x)\big)y_2'(x) &= 0 \qquad x \in I_2. \end{aligned}$$

Odečtením obou rovnic dostaneme

$$Q\big(y_1(x)\big)y_1'(x) = Q\big(y_2(x)\big)y_2'(x) \qquad x \in I_1 \cap I_2,$$

což lze dále upravit na

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}\Big(y_1(x)\Big)y_1'(x) &= \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}\Big(y_2(x)\Big)y_2'(x), \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[S\big(y_1(x)\big)\Big] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[S\big(y_2(x)\big)\Big]. \end{aligned}$$

Integrací poslední rovnosti se dostaneme ke vztahu

$$S\big(y_1(x)\big) = S\big(y_2(x)\big) + d, \quad d \in \mathbb{R}, \quad x \in I_1 \cap I_2.$$

Protože obě řešení y_1, y_2 obsahují bod $\binom{x_0}{y_0}$, dostáváme speciálně pro $x = x_0$ rovnost

$$S\big(\underbrace{y_1(x_0)}_{=y_0}\big) = S\big(\underbrace{y_2(x_0)}_{=y_0}\big) + d,$$

z níž plyne, že $d = 0$. Platí tedy $S\big(y_1(x)\big) = S\big(y_2(x)\big)$ pro $\forall x \in I_1 \cap I_2$ a zároveň $S'(y) = Q(y) \neq 0$ na J. Funkce S je tedy na J monotónní (protože je i spojitá, jak je zřejmé z její definice). Tzn. $y_1(x) = y_2(x)$ pro $\forall x \in I_1 \cap I_2$, a řešení je tedy dáno jednoznačně. □

Příklad 1.11. Řešme rovnici

$$2yy' - 4x^3 = 0. \tag{1.4}$$

Rovnice je typu (1.2), kde $Q(y) = 2y$ a $P(x) = -4x^3$ (kde P i Q jsou spojité na $\mathbb{R}$) a její řešení je tedy podle věty 1.9 implicitně dáno rovnicí

$$\int P(x)\mathrm{d}x + \int Q(y)\mathrm{d}y = C, \qquad \text{kde } C \in \mathbb{R}.$$

Integrací této rovnice, tj. $-\int 4x^3\mathrm{d}x + \int 2y\mathrm{d}y = C$, se dostaneme k rovnici

$$-x^4 + y^2 = C,$$

která nám implicitně definuje funkci $y = y(x)$.

Zřejmě platí $Q(y) \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 0$. Podle věty 1.10 prochází každým bodem roviny $\mathbb{R}^2$, který neleží na přímce $y = 0$, právě jedna integrální křivka naší diferenciální rovnice. Zvlášť je třeba diskutovat případ, kdy $Q(y) = 0$, tj. když nemáme z věty 1.10 zaručenu jednoznačnost. Dosazením do (1.4) se snadno přesvědčíme, že body $\binom{x}{0}$, kde $x \neq 0$, neprochází žádné řešení rovnice (1.4). Bodem $\binom{0}{0}$ prochází dvě řešení, a to $y(x) = \pm x^2$ (viz dále).

Jak již bylo poznamenáno, řešení naší diferenciální rovnice jsou implicitně dána rovnicí $-x^4 + y^2 = C$, kde $C \in \mathbb{R}$. Uvažme zvlášť následující případy podle hodnoty konstanty C:

- pro $C = 0$: $y(x) = \pm x^2$ a $D_y = \mathbb{R}$,
- pro $C > 0$: $y(x) = \pm\sqrt{C + x^4}$ a $D_y = \mathbb{R}$,
- pro $C < 0$: $y(x) = \pm\sqrt{C + x^4}$ a $D_y = (-\infty, -\sqrt[4]{|C|}) \cup (\sqrt[4]{|C|}, +\infty)$.

1.3 Rovnice separovatelné

Definice 1.12. Nechť $P_1 = P_1(x)$, $Q_1 = Q_1(x)$, $P_2 = P_2(y)$ a $Q_2 = Q_2(y)$ jsou spojité funkce. Pak rovnice tvaru

$$P_1(x)P_2(y) + Q_1(x)Q_2(y)y' = 0 \tag{1.5}$$

se nazývá **separovatelná diferenciální rovnice 1. řádu**.

Poznámka 1.13 (**Formální postup**). Rovnici (1.5), kde P_1, Q_1 jsou spojité na intervalu $I = (a, b)$ a P_2, Q_2 jsou spojité na intervalu $J = (c, d)$, upravíme pro $Q_1(x), P_2(y) \neq 0$ do tvaru

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}y' = 0. \tag{1.6}$$

Poznamenejme ještě, že jsme provedli obecně neekvivalentní úpravu. Nemáme totiž zaručeno, že funkce Q_1 a P_2 nenabývají na svých definičních oborech (resp. na intervalech I a J) nulových hodnot. Tímto problémem se budeme zabývat později.

Rovnice (1.6) je separovaná a můžeme pro její vyřešení použít postup ze sekce 1.2. Hledaná funkce $y = y(x)$ je implicitně definovaná vztahem

$$\int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\mathrm{d}x + \int \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}\mathrm{d}y = C, \qquad \text{kde } C \in \mathbb{R}.$$

Pro jednoznačnost navíc požadujeme, aby $Q_2(y) \neq 0$ (na intervalu J).

Další řešení rovnice (1.5) se objevují v důsledku provedení neekvivalentní úpravy. Požadavkem $P_2(y) \neq 0$ jsme vyloučili všechny takové funkce y, pro něž $P_2(y(x)) = 0$ pro nějaké $x \in I$. Označme $b_j \in J$, kde $j = 1, \dots, n_p$, kořeny rovnice $P_2(y) = 0$. Snadno se lze přesvědčit dosazením, že funkce ve tvaru $y(x) \equiv b_j$, pro $\forall j \in \widehat{n}_p$ jsou řešením rovnice (1.5).

Dále je třeba vyšetřit případ, kdy $Q_1(x) = 0$. Označme $a_i \in I$, kde $i = 1, \dots, n_q$, kořeny rovnice $Q_1(x) = 0$. Přímky $x = a_i$, $i = 1, \dots, n_q$ a $y = b_j$, $j = 1, \dots, n_p$ rozdělují interval $I \times J$ na částečné otevřené intervaly, kde $Q_1(x), P_2(y) \neq 0$. Rovnice (1.5) a (1.6) jsou na těchto částečných intervalech ekvivalentní. Takto získaná řešení je však třeba ručně prozkoumat z hlediska definičního oboru přímo na rovnici (1.5).

Řešení diferenciální rovnice (1.5) jsou tedy funkce $y(x) \equiv b_j$, $j = 1, \dots, n_p$, kde čísla b_j jsou kořeny rovnice $P_2(y) = 0$, a všechna řešení rovnice (1.6), u nichž je ale třeba ručně ověřit jejich definiční obor.

Příklad 1.14. Řešme rovnici

$$y - xy' = 0. \tag{1.7}$$

Rovnice je ve tvaru (1.5), kde $P_1(x) = 1$, $Q_1(x) = x$, $P_2(y) = y$ a $Q_2(y) = -1$ (všechny tyto funkce jsou spojité na $\mathbb{R}$). Interval $I \times J$ ve smyslu předchozí poznámky je tedy celé $\mathbb{R}^2$. Předpokládejme, že $xy \neq 0$. Pak lze (1.7) upravit do tvaru

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} y' = 0. \tag{1.8}$$

Tato rovnice je již separovaná a její řešení pro $xy \neq 0$ je implicitně definované rovnicí $\ln|x| - \ln|y| = C$, kde $C \in \mathbb{R}$. Věta 1.10 nám navíc zaručuje jednoznačnost tohoto řešení. Snadnou úpravou získáme řešení ve tvaru

$$|y(x)| = D\,|x|\,, \qquad \text{kde } D = \mathrm{e}^{-C} > 0.$$

V prvním a třetím kvadrantu lze řešení psát ve tvaru $y(x) = Dx$, zatímco ve druhém a čtvrtém kvadrantu ve tvaru $y(x) = -Dx$. Tato řešení si geometricky představíme jako polopřímky s počátkem v bodě $\binom{0}{0}$. Bod $\binom{0}{0}$ však na těchto polopřímkách neleží. Přímky $y = 0$ a $x = 0$ řešením této rovnice pochopitelně nejsou. Řešení lze zřejmě zapsat jednotně

$$y(x) = Dx, \qquad \text{kde } D \neq 0, D_y = \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+.$$

Soustřeďme se nyní na řešení rovnice (1.7). Rovnice $P_2(y) = 0$ má právě jeden kořen $y_1 = 0$ a rovnice $Q_1(x) = 0$ má rovněž jeden kořen $x_1 = 0$. Podle předchozí poznámky je tedy funkce $y(x) \equiv 0$ řešením rovnice (1.7), což snadno ověříme dosazením. Podmínka $xy \neq 0$ rozděluje $\mathbb{R}^2$ na čtyři kvadranty, na nichž jsou rovnice (1.7) a (1.8) ekvivalentní. Proto zde mají tyto rovnice stejná řešení. Je však třeba ověřit jejich definiční obor. Snadno zjistíme, že funkce $y(x) = Dx$, kde $D \neq 0$ řeší (1.7) na celém $\mathbb{R}$. Proto lze všechna řešení zapsat v jednotném tvaru

$$y(x) = Dx, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, D \in \mathbb{R}.$$

Lze si všimnout, že každým bodem $\mathbb{R}^2$, který neleží na přímce $x = 0$, prochází právě jedna integrální křivka. Bodem $\binom{0}{0}$ jich prochází nekonečně mnoho. Ostatními body na přímce $x = 0$ neprochází žádná.

1.4 Homogenní diferenciální rovnice 1. řádu

Definice 1.15. Funkce $F = F(x_1, \dots, x_n)$ se nazývá **homogenní stupně** k, pokud platí

$$\Big(\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\Big)\Big(F(tx_1, \dots, tx_n) = t^k F(x_1, \dots, x_n)\Big), \quad \text{kde } k \in \mathbb{R}.$$

PŘÍKLAD 1.16.

1. $F(x,y) = x^2+y^2-xy$. Protože $F(tx,ty) = t^2x^2+t^2y^2-t^2xy = t^2F(x,y)$, je F homogenní stupně 2.

2. $F(x,y,z) = x+y-z$ je homogenní stupně 1 (lineární funkce jsou homogenní stupně 1 přímo z definice).

3. $F(x,y) = \dfrac{x^2-xy}{y^2-4x^2}$, pro $y^2-4x^2 \neq 0$ je homogenní stupně 0.

4. $F(x,y) = x^2 - y$ není homogenní.

5. $F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ (tj. eukleidovská norma v $\mathbb{R}^2$). Potom $F(tx,ty) = |t|\, F(x,y)$ (což je definiční vlastnost normy). V tomto případě se také říká, že F je pozitivně homogenní stupně 1. Pokud bychom v definici 1.15 připouštěli pouze $t > 0$, mohli bychom říct, že F je homogenní stupně 1.

6. $F(x,y) = \sqrt[4]{x^2+y^2}$. Potom $F(tx,ty) = \sqrt{|t|}F(x,y)$ a F je pozitivně homogenní stupně 1/2.

7. $F(x,y) = \sqrt{x}$, pro $x > 0$. F je homogenní stupně 1/2 pro $t > 0$.

Definice 1.17. Nechť $P = P(x,y)$, $Q = Q(x,y)$ jsou homogenní funkce stupně k (na průniku svých definičních oborů, který budiž neprázdný). Pak diferenciální rovnice tvaru

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0 \tag{1.9}$$

se nazývá **homogenní diferenciální rovnice stupně** k.

POZNÁMKA 1.18 (**Formální postup**). Rovnici typu (1.9) pomáhá řešit substituce „$y = xu$“, kde u je nová funkce. Chceme tedy provést záměnu proměnných (funkcionální úprava). Za tímto účelem definujeme zobrazení Φ, které nám právě přechod $(x,y) \leftrightarrow (t,u)$ umožní. Na zobrazení Φ přitom klademe požadavek, aby bylo regulární a dostatečně diferencovatelné. Nápověda pro správné zavedení zobrazení Φ je právě ve vztahu „$y = xu$“. Položme tedy $x = t$ a $y = tu$ a potom zřejmě můžeme psát

$$\Phi\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ tu \end{pmatrix}.$$

Zřejmě platí

$$\Phi'\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & t \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det \Phi'\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = t.$$

Tj. zobrazení Φ je regulární právě tehdy, když $t \neq 0$.

Abychom propojili funkční závislost $y = y(x) \leftrightarrow u = u(t)$ sestavíme základní funkční identitu
$$y\big(x(t)\big) = tu(t),$$
kterou lze derivovat podle proměnné t. Levá strana pak bude $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(y(x(t)\big) = y'(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t) = y'(t)$. Pravá strana bude mít tvar $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(tu(t)\big) = u(t) + t\dot{u}(t)$. Dostaneme se tedy ke vztahu
$$y'(t) = u(t) + t\dot{u}(t),$$
který dosadíme do rovnice (1.9). Tím dojdeme ke vztahu
$$P\big(t, tu(t)\big) + Q\big(t, tu(t)\big)\big(u(t) + t\dot{u}(t)\big) = 0.$$
Z homogenity funkcí P a Q plyne
$$t^k\Big[P\big(1, u(t)\big) + Q\big(1, u(t)\big)\big(u(t) + t\dot{u}(t)\big)\Big] = 0.$$
Protože předpokládáme $t \neq 0$ (např. kvůli regularitě Φ), můžeme rovnici vykrátit výrazem t^k a po snadné úprave dostaneme
$$\Big[P\big(1, u(t)\big) + Q\big(1, u(t)\big)u(t)\Big] + tQ\big(1, u(t)\big)\dot{u}(t) = 0, \tag{1.10}$$
což je separovatelná rovnice v proměnných t a u.

Vztah mezi řešeními rovnice (1.9) a (1.10) nám dává následující věta.

Věta 1.19. *Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $0 \notin M$ je otevřená množina. Je-li $u = u(t)$ řešení rovnice (1.10), pak $y(x) = xu(x)$ je řešení rovnice (1.9) na M.*

Je-li $y = y(x)$ řešení rovnice (1.9), pak $u = u(t)$, kde $u(t) = \frac{1}{t}y(t)$, je řešení rovnice (1.10).

Důkaz. Viz předchozí poznámka. V obou směrech použita regulární substituce $t = x$, $tu = y$ pro $t \in M$. V prvním případě přejdeme od (1.10) k (1.9) vynásobení nenulovým číslem t^k. Při opačném směru budeme číslem t^k dělit. □

Příklad 1.20. Řešme rovnici
$$y\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right) - xy' = 0. \tag{1.11}$$

Zde zřejmě $P(x,y) = y\,(1 + \ln(y/x))$ a $Q(x,y) = -x$. Snadno se přesvědčíme, že P i Q jsou homogenní stupně 1. Ve funkci P se vyskytuje zlomek a logaritmus, což omezuje její definiční obor na množinu $D_P = \left\{\binom{x}{y} \mid y/x > 0\right\}$. Abychom vyhověli podmínce $y/x > 0$, omezujeme se na I. a III. kvadrant $\mathbb{R}^2$.

Jak víme z poznámky 1.18, homogenní rovnice řešíme substitucí
$$\Phi\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ tu \end{pmatrix},$$
která je regulární pro $t \neq 0$ (tato podmínka je vzhledem k D_P automaticky splněna). Po dosazení dostaneme
$$tu\left(1 + \ln\frac{tu}{t}\right) - t(u + t\dot{u}) = 0,$$

odkud po úpravě obdržíme

$$u \ln u - t\dot{u} = 0, \tag{1.12}$$

což je separovatelná rovnice.

Rovnici (1.12) úpravíme za předpokladu $t \neq 0$, $u \neq 0$ a $u \neq 1$ do tvaru

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{u \ln u}\dot{u} = 0. \tag{1.13}$$

Předpoklad $t \neq 0$ je v našem případě automaticky splněn a dělení rovnice výrazem t tedy bylo ekvivalentní úpravou. Dělení výrazem $u \ln u$ ovšem ekvivalentní úpravou nebylo. Funkce $u(t) \equiv 0$ zřejmě nevyhovuje (kvůli logaritmu), a proto neřeší rovnici (1.12). Funkce $u(t) \equiv 1$ ale rovnici (1.12) vyhovuje.

Řešení rovnice (1.13) jsou diferencovatelné funkce, které vyhovují rovnici

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int \frac{\mathrm{d}u}{u \ln u} = \ln C, \qquad \text{kde } C > 0,$$

z níž po integraci dostaneme

$$\ln|t| - \ln|\ln u(t)| = \ln C.$$

Odlogaritmováním tedy obdržíme vztah

$$|t| = C\,|\ln u(t)|\,.$$

Snadno si rozmyslíme, že pokud řešení zapíšeme ve tvaru

$$u(t) = \mathrm{e}^{Dt}, \qquad \text{kde } D \in \mathbb{R},\ t \neq 0,$$

postihli jsme tím všechna řešení rovnice (1.12) včetně řešení $u(t) \equiv 1$ pro volbu $D = 0$. Všechna řešení původní rovnice (1.11) lze tedy zapsat ve tvaru

$$y(x) = x\mathrm{e}^{Dx}, \qquad \text{kde } D \in \mathbb{R},\ x \neq 0.$$

Poznámka 1.21 (**Kvazihomogenní rovnice**). Funkci $F = F(x,y)$ nazvu **kvazihomogenní funkcí**, pokud platí

$$\Big(\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\Big)\Big(F(t^\alpha x, t^\beta y) = t^{\beta-\alpha}F(x,y)\Big), \quad \text{kde } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Rovnici tvaru

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0,$$

kde $P = P(x,y), Q = Q(x,y)$ jsou kvazihomogenní funkce se stejnými exponenty α, β, nazvu **kvazihomogenní diferenciální rovnicí**.

Řešení: Pokud $\beta \neq 0$, pak lze pomocí substituce $y = x^{\frac{\alpha}{\beta}}u$ rovnici převést na rovnici separovatelnou. Existence a jednoznačnost řešení bude mimo body $x = 0$ zaručena větou analogickou 1.19.

1.5 Diferenciální rovnice tvaru $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$

POZNÁMKA 1.22. Řešíme rovnici ve tvaru

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right), \tag{1.14}$$

kde f je spojitá funkce (na nějakém intervalu), $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ jsou reálné konstanty. Pro rovnici v tomto tvaru nemáme žádné zvláštní pojmenování.

POZNÁMKA 1.23 (**Formální postup**). Při řešení diferenciální rovnice (1.14) rozlišíme následující případy:

1. Nechť $a = b = \alpha = \beta = 0$. Potom rovnice (1.14) je tvaru

$$y' = f\left(\frac{c}{\gamma}\right)$$

   a řešením je zřejmě

$$y(x) = f\left(\frac{c}{\gamma}\right)x + D, \qquad D \in \mathbb{R}.$$

2. Nechť $b = \beta = 0$. Pak z (1.14) máme ve tvaru

$$y' = f\left(\frac{ax+c}{\alpha x+\gamma}\right),$$

   což je již separovaná rovnice. Řešením tedy je

$$y(x) = \int f\left(\frac{ax+c}{\alpha x+\gamma}\right) \mathrm{d}x.$$

3. Nechť $c = \gamma = 0$. Potom z (1.14) dostaneme

$$y' = f\left(\frac{ax+by}{\alpha x+\beta y}\right),$$

   což je vlastně homogenní diferenciální rovnice. To snadno ověříme, srovnáme-li tuto rovnici s (1.9). Zjistíme

$$P(x,y) = -f\left(\frac{ax+by}{\alpha x+\beta y}\right) \qquad \text{a} \qquad Q(x,y) = 1$$

   a tedy

$$P(tx,ty) = -f\left(\frac{atx+bty}{\alpha tx+\beta ty}\right) = -f\left(\frac{ax+by}{\alpha x+\beta y}\right) = t^0 P(x,y).$$

   Vidíme, že funkce P i Q jsou homogenní stupně 0. Naši rovnici řešíme postupem z odstavce 1.4.

4. Nechť $b^2 + \beta^2 \neq 0$ a $D = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0.$

a) Nechť navíc $b \neq 0$. Potom z $D = a\beta - \alpha b = 0$ plyne $\alpha = \beta a/b$ a rovnici (1.14) lze přepsat do tvaru

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\frac{\beta}{b}(ax + by) + \gamma}\right). \tag{1.15}$$

Poznamenejme, že funkce $z(x) = ax + by(x)$ má stejnou diferencovatelnost jako funkce $y(x)$. Dalším krokem řešení je provedení substituce $\Phi : (x, y) \mapsto (t, u)$ definované následujícím předpisem

$$\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ ax + by \end{pmatrix}.$$

Transformace Φ je zřejmě regulární, protože

$$\Phi'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Je zřejmé, že $\det \Phi'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$, což znamená regularitu Φ.

Naše základní funkční identita je $u(t) = at + by(t)$ a její derivace je $\dot{u}(t) = a + by'(t)$ ($y = y(x)$ derivujeme podle t jako složenou funkci). Touto substitucí převedeme naši rovnici do tvaru

$$\frac{1}{b}(\dot{u}(t) - a) = f\left(\frac{u(t) + c}{\frac{\beta}{b}u(t) + \gamma}\right), \tag{1.16}$$

což je diferenciální rovnice separovatelná.

Můžeme tedy konstatovat, že každému řešení $y(x)$ rovnice (1.15) odpovídá řešení $u(t) = at + by(t)$ rovnice (1.16). Snadno se dokáže i opačné tvrzení, že ke každému řešení $u(t)$ rovnice (1.16), existuje řešení $y(x)$ rovnice (1.15) takové, že $u(x) = ax + by(x)$.

b) Nechť nyní $b = 0$. Zřejmě $\left(b = 0 \wedge b^2 + \beta^2 \neq 0\right) \Rightarrow (\beta \neq 0)$. Potom z $D = 0$ dostaneme $a\beta = 0$, a tedy $a = 0$. Nyní je zřejmé, že $ax + by = 0$ a naše rovnice přejde do tvaru

$$y' = f\left(\frac{c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right).$$

Podobně jako v předchozím případě, použijeme regulární substituci $\Phi : (x, y) \mapsto (t, u)$ definovanou

$$\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \alpha x + \beta y \end{pmatrix}.$$

A dále pokračujeme analogicky jako v předchozím případě.

5. Nechť $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0$. Potom soustava

$$\begin{aligned} ax_0 + by_0 + c &= 0 \\ \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

má jednoznačně určené řešení. Lineární transformace $\Phi : (x, y) \mapsto (t, u)$

$$\Phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

je zřejmě regulární. Základní funční identita je $y(x) = y_0 + u(x - x_0)$ a její derivace je $y'(x) = \dot{u}(x - x_0)$. Snadno nahlédneme, že platí

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma = \alpha x + \beta y + \gamma - (\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma) &= \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0), \\ ax + by + c = ax + by + c - (\underbrace{ax_0 + by_0 + c}_{=0}) &= a(\underbrace{x - x_0}_{=t}) + b(\underbrace{y - y_0}_{=u}). \end{aligned}$$

Tím jsme naši rovnici převedli do tvaru

$$\dot{u}(t) = f\left(\frac{at + bu}{\alpha t + \beta u}\right). \tag{1.17}$$

Řešení rovnice v tomto tvaru jsme již provedli v případě (3). Snadno ověříme dosazením, že pokud $u(t)$ řeší (1.17), pak $y(x) = y_0 + u(x - x_0)$ řeší rovnici (1.14). A naopak, je-li $y(x)$ řešením rovnice (1.14), pak funkce $u(t) = -y_0 + y(x_0 + t)$ řeší rovnici (1.17).

Příklad 1.24. Mějme rovnici

$$y' = 2\left(\frac{y + 2}{x + y - 1}\right)^2. \tag{1.18}$$

Rovnice je typu $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$, kde $f(s) = 2s^2$, $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ a $\gamma = -1$. Snadno si rozmyslíme, že se jedná o případ 5.

Soustavě lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 0x_0 + 1y_0 + 2 &= 0 \\ 1x_0 + 1y_0 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

vyhovuje řešení $(x_0, y_0) = (3, -2)$. Provádíme tedy regulární substituci $t = x - 3$ a $u = y + 2$. Tím se dostaneme k homogenní rovnici stupně 0

$$\dot{u} = 2\left(\frac{u}{t + u}\right)^2. \tag{1.19}$$

Porovnáním s (1.9) zjistíme, že $P(t, u) = -2\left(\frac{u}{t+u}\right)^2$ a $Q(t, u) = 1$. Homogenní rovnice řešíme substitucí typu „$u = tw$“. Zvolíme tedy regulární substituci $\Phi : (s, w) \mapsto (t, u)$ definovanou

$$\Phi \begin{pmatrix} s \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ sw \end{pmatrix}.$$

Potom zřejmě platí $\dot{u}(s) = w + s\dot{w}(s)$ a tedy

$$w + s\dot{w} = 2\left(\frac{sw}{s + sw}\right)^2.$$

Tuto rovnici snadno upravíme do tvaru

$$s\dot{w} = -\frac{w(1+w^2)}{(1+w)^2}. \tag{1.20}$$

Jedná se tedy o separovatelnou rovnici.

Předpokládejme, že $s \neq 0$ a $w \neq 0$. Potom

$$\frac{1}{s} + \frac{(1+w)^2}{w(1+w^2)}\dot{w} = 0, \tag{1.21}$$

z čehož plyne

$$\ln|s| + \ln|w| + 2\operatorname{arctg} w = \ln C, \qquad \text{kde } C > 0.$$

Odlogaritmováním této rovnice dostaneme

$$|w(s)| \exp\left(2\operatorname{arctg} w(s)\right) = \frac{C}{|s|}, \qquad \text{kde } C > 0, \tag{1.22}$$

což je implicitní zápis funkce $w(s)$. Tato funkce, je-li diferencovatelná, řeší (1.21) pro $s \neq 0$.

Protože jsme provedli neekvivalentní úpravu, je třeba ještě diskutovat řešení rovnice (1.20). Požadovali jsme, aby $w \neq 0$. Pak funkce $w(s) \equiv 0$ řeší (1.20) pro všechna $s \in \mathbb{R}$, což snadno ověříme dosazením. Toto řešení lze postihnout zápisem (1.22), připustíme-li v něm navíc $C = 0$. Pokud v (1.22) připustíme také $C < 0$, zbavíme se absolutních hodnot. Můžeme konstatovat, že diferencovatelné funkce $w(s)$, které řeší rovnici

$$w(s)\exp(2\operatorname{arctg} w(s)) = \frac{C}{s}, \qquad \text{kde } C \in \mathbb{R},$$

jsou řešením rovnice (1.20) pro $s \neq 0$.

Po dosazení původních proměnných obdržíme implicitní zápis funkce $y = y(x)$, která řeší původní rovnici (1.18) (je-li diferencovatelná)

$$(y(x)+2)\exp\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{y(x)+2}{x-3}\right)\right) = C, \qquad \text{kde } C \in \mathbb{R}.$$

Definiční obor funkce y je zřejmě $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$. Snadno si rozmyslíme, že tento zápis zahrnuje všechna nalezená řešení, včetně konstantního řešení $y(x) \equiv -2$, které odpovídá řešení $w(s) \equiv 0$ pro volbu $C = 0$.

1.6 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Definice 1.25. Nechť $p = p(x)$, $q = q(x)$ jsou spojité. Pak rovnici ve tvaru

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{1.23}$$

nazýváme **lineární diferenciální rovnice 1. řádu**.

Pokud $q(x) \equiv 0$, pak (1.23) nazveme **lineární diferenciální rovnice 1. řádu bez pravé strany** a má tvar

$$y' + p(x)y = 0. \tag{1.24}$$

Pokud $q(x) \not\equiv 0$, pak (1.23) nazveme **lineární diferenciální rovnice 1. řádu s pravou stranou**.

Poznámka 1.26 (**Formální postup**, rovnice bez pravé strany). Rovnice (1.24) má triviální řešení $y(x) \equiv 0$. Navíc je separovatelná a lze ji řešit postupem ze sekce 1.3. Její řešení je implicitně dáno rovnicí

$$\int p(x)\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = C, \quad \text{tj. po integraci} \quad \int p(x)\mathrm{d}x + \ln|y(x)| = C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta. Odlogaritmováním poslední rovnosti dostaneme vztah $|y(x)| \exp\left(\int p(x)\mathrm{d}x\right) = D$, kde $D = \mathrm{e}^C > 0$. Snadno si rozmyslíme, že jednotný zápis řešení, zahrnující všechny uvedené alternativy je následující

$$y(x) = D\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}, \qquad \text{kde } D \in \mathbb{R}.$$

Uvedené řešení nazýváme *obecné řešení rovnice* (1.24).

Věta 1.27. *Nechť $p = p(x)$ je spojitá na (a, b). Pak pro každé $\binom{x_0}{y_0} \in (a, b) \times \mathbb{R}$ existuje právě jedno řešení $y = y(x)$ úlohy*

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= 0 \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{1.25}$$

na (a, b).

Důkaz. Je třeba dokázat existenci a jednoznačnost.

(I) Nejprve dokážeme existenci (viz také poznámka 1.26). Uvažme případ $y_0 = 0$. Potom řešení má zřejmě tvar $y(x) \equiv 0$, $\forall x \in (a, b)$. Nechť dále $y_0 \neq 0$. Pak řešením je funkce $y(x) = D \exp\left\{-\int p(x)\mathrm{d}x\right\}$, pro každé $x \in (a, b)$, $D \in \mathbb{R}$.

Konstantu D je třeba určit. Uvažme proto počáteční podmínku ve tvaru $y(x_0) = y_0$. Potom zřejmě musí platit $D = y_0 \exp\left\{\int p(x)\mathrm{d}x|_{x=x_0}\right\}$. Dostáváme tak výsledné řešení ve tvaru

$$y(x) = y_0 \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}.$$

(II) Nyní dokažme jednoznačnost. Předpokládejme, že jsme podle předchozí části důkazu a podle poznámky 1.26 získali řešení $y_1(x) = y_0 \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}$ (separací proměnných). Předpokládejme dále, že existuje nějaké řešení y_2. O těchto řešeních ukážeme, že jsou shodná. Protože y_1 a y_2 řeší úlohu (1.25), platí

$$\begin{aligned} y_1' + p(x)y_1 &= 0 \\ y_1(x_0) &= y_0 \end{aligned} \qquad \text{a} \qquad \begin{aligned} y_2' + p(x)y_2 &= 0 \\ y_2(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

Dále definujeme funkci $u = u(x)$ následujícím předpisem

$$u(x) = y_2(x) \exp\left\{\int_{x_0}^{x} p(\xi)\mathrm{d}\xi\right\},$$

zkoumejme její chování pomocí první derivace.

$$\begin{aligned} u'(x) &= y_2'(x)\exp\left\{\int_{x_0}^{x} p(\xi)\mathrm{d}\xi\right\} + y_2(x)\exp\left\{\int_{x_0}^{x} p(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}p(x) = \\ &= \underbrace{(y_2'(x) + y_2(x)p(x))}_{=0}\exp\left\{\int_{x_0}^{x} p(\xi)\mathrm{d}\xi\right\} = 0. \end{aligned}$$

To ale znamená, že u je konstantní (tzn. $(\exists C \in \mathbb{R})\,(\forall x \in (a,b))\,(u(x) = C)$). Konstantu C lze přitom určit z počátečních podmínek $u(x_0) = y_2(x_0) = y_0$, a tedy $C = y_0$. Odtud zřejmě dostáváme

$$y_2(x)\exp\left\{\int_{x_0}^{x} p(\xi)\mathrm{d}\xi\right\} = y_0,$$

což po zřejmé úpravě dává vztah

$$y_2(x) = y_0\exp\left\{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}.$$

Pro libovolné dvě řešení y_1 a y_2 tedy platí $y_1(x) = y_2(x)$ pro $\forall x \in (a,b)$, což už znamená jednoznačnost. □

Poznámka 1.28. Z důkazu předchozí věty vyplývá, že počáteční podmínce $y(x_0) = 0$ vždy odpovídá řešení $y(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$.

Poznámka 1.29 (**Formální postup**, rovnice s pravou stranou). Pro řešení rovnice s pravou stranou se používá **metoda variace konstanty**. Aplikace zmíněné metody na tuto úlohu spočívá v tom, že ve vztahu pro obecné řešení rovnice (1.24) předpokládáme, že D již není konstanta, ale je funkcí proměnné x, tj. $D = D(x)$. Řešení pak předpokládáme ve tvaru

$$y(x) = D(x)\exp\left\{-\int p(x)\mathrm{d}x\right\}.$$

Dosadíme-li předpokládaný tvar řešení do rovnice (1.23) dostaneme

$$D'(x)\exp\{\,\cdots\,\} + D(x)\exp\{\,\cdots\,\}(-p(x)) + p(x)D(x)\exp\{\,\cdots\,\} = q(x).$$

Druhý a třetí sčítanec na levé straně se navzájem vyruší a dostaneme vztah pro $D'(x)$

$$D'(x) = q(x)\exp\left\{\int p(x)\mathrm{d}x\right\},$$

odkud integrací určíme $D(x)$.

Obecné řešení rovnice s pravou stranou potom je

$$y(x) = \left[\int q(x)\exp\left\{\int p(x)\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}x\right]\cdot\exp\left\{-\int p(x)\mathrm{d}x\right\}. \tag{1.26}$$

Uvědomme si, že v části $\left[\int q(x)\exp\left\{\int p(x)\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}x\right]$ je schována i integrační konstanta (jedná se o neurčitý integrál) a je zde tedy i zabudováno řešení rovnice bez pravé strany.

Poznámka 1.30. Poznamenejme ještě, že řešení rovnice s pravou stranou se často zapisuje ve tvaru součtu obecného řešení rovnice bez pravé strany a partikulárního řešení rovnice s pravou stranou (viz řešení lineárních rovnic [?]).

Věta 1.31. *Nechť $p = p(x)$ a $q = q(x)$ jsou spojité na (a, b). Pak pro každé $\binom{x_0}{y_0} \in (a, b) \times \mathbb{R}$ existuje právě 1 řešení úlohy*

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= q(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{1.27}$$

na (a, b).

Důkaz. Podobně jako v předchozí větě, je i zde třeba dokázat existenci a jednoznačnost.

(I) Dokažme existenci za pomoci poznámky 1.29. Pomocí separace proměnných a metody variace konstanty navrhneme řešení úlohy (1.27) ve tvaru

$$y(x) = \left(\int\limits_{x_0}^{x} q(\xi) \exp\left\{ \int\limits_{x_0}^{\xi} p(\tau)\mathrm{d}\tau \right\} \mathrm{d}\xi + D \right) \exp\left\{ - \int\limits_{x_0}^{x} p(\xi)\mathrm{d}\xi \right\}.$$

Z tohoto vztahu ihned plyne $y(x_0) = D$ a vzhledem k počáteční podmínce zřejmě $D = y_0$. Funkce $y = y(x)$ řeší úlohu (1.27).

(II) Při dokazování jednoznačnosti se postupuje obvyklým způsobem. Předpokládáme, že jsme našli řešení y_1 ve tvaru z předchozí části důkazu. Dále předpokládáme, že máme nějaké další řešení y_2, o němž ukážeme, že musí být shodné s řešením y_1, čímž bude jednoznačnost dokázána. Pro funkce y_1 a y_2 tedy platí

$$\begin{aligned} y_1' + p(x)y_1 &= q(x) \\ y_1(x_0) &= y_0 \end{aligned} \qquad \text{a} \qquad \begin{aligned} y_2' + p(x)y_2 &= q(x) \\ y_2(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

Odečtením příslušných rovnic získáme

$$\begin{aligned} \underbrace{(y_1 - y_2)}_{\text{ozn. } z}' + p(x)(y_1 - y_2) &= 0, \\ (y_1 - y_2)(x_0) &= 0. \end{aligned}$$

Označme $z = y_1 - y_2$. Pro takto definovanou funkci z tedy dostáváme

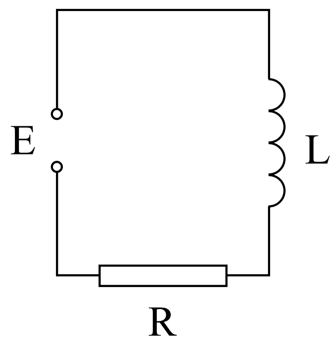
$$\begin{aligned} z' + p(x)z &= 0, \\ z(x_0) &= 0. \end{aligned}$$

Pro funkci z tedy řešíme úlohu ve tvaru (1.25). Tato úloha však má právě jedno řešení, a to $z(x) \equiv 0$, $\forall x \in (a, b)$. Odtud $y_1(x) = y_2(x)$, $\forall x \in (a, b)$. Tím je však jednoznačnost dokázána. □

Příklad 1.32. **Elektrický obvod**.

Mějmě RL obvod (viz obr. 1.2). Označme E napětí, R elektrický odpor, L indukčnost a J elektrický proud. Předpokládejme, že průběh připojeného napětí je dán vztahem

$$E(t) = E_0 \sin \omega t,$$



Obrázek 1.2: RL obvod.

a nechť počáteční stav proudu v čase $t_0 = 0$ je $J(0) = J_0$.

Z Kirchhoffových zákonů dostáváme pro tento obvod rovnici

$$L\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} + RJ = E(t).$$

Při řešení této diferenciální rovnice postupujeme tak, že nejprve najdeme řešení příslušné rovnice bez pravé strany (separací proměnných) a poté metodou variace konstanty najdeme obecné řešení rovnice s pravou stranou. Na závěr je třeba určit integrační konstantu z počáteční podmínky.

Řešení rovnice bez pravé strany je zřejmě

$$J(t) = \alpha \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}, \qquad \text{kde } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Pro použití metody variace konstanty předpokládáme, že $\alpha = \alpha(t)$ a tedy, že řešení rovnice bez pravé strany je ve tvaru

$$J(t) = \alpha(t)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}.$$

Toto řešení dosadíme do původní diferenciální rovnice (s pravou stranou), abychom dostali vztah

$$L\left(\alpha'(t)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} + \alpha(t)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\left(-\frac{R}{L}\right)\right) + R\alpha(t)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} = E(t),$$

odkud po úpravě

$$\alpha'(t) = \frac{1}{L}E(t)\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}.$$

Integrací poslední rovnice dostaneme

$$\alpha(t) = \frac{E_0}{L}\int_0^t \sin\omega\tau\ \mathrm{e}^{\frac{R}{L}\tau}\mathrm{d}\tau = \underbrace{\cdots}_{\text{per partes}} = \frac{E_0}{R^2+L^2\omega^2}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\left[R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t\right].$$

Dospěli jsme tedy k řešení

$$J(t) = \underbrace{\frac{E_0}{R^2+L^2\omega^2}\left[R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t\right]}_{\text{partikulární řešení}} + D\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t},$$

kde je ještě třeba určit integrační konstantu D z počátečních podmínek

$$J(0) = J_0 = \frac{E_0}{R^2 + L^2\omega^2}(-L\omega) + D.$$

Řešení úlohy

$$\begin{aligned} L\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} + RJ &= E_0 \sin\omega t \\ J(0) &= J_0 \end{aligned}$$

tedy je

$$J(t) = \frac{E_0}{R^2 + L^2\omega^2}\left[R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t\right] + \left[J_0 + \frac{E_0 L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\right]\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}.$$

Položíme-li $R = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}\cos\gamma$ a $L = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}\sin\gamma$, lze psát

$$R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}\sin(\omega t - \gamma),$$

odkud je patrné, že přiložené napětí vybudí v RL obvodu proud se stejnou frekvencí a s fázovým zpožděním γ.

1.7 Bernoulliho diferenciální rovnice

Definice 1.33. Nechť $p = p(x)$ a $q = q(x)$ jsou spojité na (a, b), $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Pak rovnice ve tvaru

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha \tag{1.28}$$

se nazývá **Bernoulliho**[1] **diferenciální rovnice 1. řádu**.

Poznámka 1.34. V definici jsme zdůraznili, že $\alpha \neq 0, 1$. Pro $\alpha = 0$ je rovnice (1.28) lineární diferenciální rovnice s pravou stranou. Pro $\alpha = 1$ dostáváme lineární diferenciální rovnici bez pravé strany. Tyto rovnice byly řešeny v předchozím odstavci. Stejně tak bychom zřejmě mohli požadovat, aby $q(x) \not\equiv 0$ na (a, b).

Poznámka 1.35. Pro $\alpha > 0$ připouštíme také $y(x) = 0$. Funkce $y(x) \equiv 0$ je v tomto případě řešením rovnice (1.28) na (a, b).

Poznámka 1.36 (**Formální postup**). Nechť $y \neq 0$ (vzhledem k předchozím poznámkám si tento předpoklad zřejmě můžeme dovolit). Vydělením výrazem y^α převedeme rovnici (1.28) do tvaru

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

Provedeme substituci $\Phi : (x, y) \mapsto (t, u)$ definovanou

$$\Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y^{1-\alpha} \end{pmatrix}.$$

Požadujeme, aby substituce Φ byla regulární neboli požadujeme, aby $\det \Phi'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$.

$$\Phi'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-\alpha)y^{-\alpha} \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \det \Phi'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1-\alpha)y^{-\alpha}.$$

[1] **Jakob Bernoulli** (1654–1705), švýcarský matematik.

Protože od začátku předpokládáme, že $\alpha \neq 1$ a $y \neq 0$, je $\det \Phi' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ zřejmě nenulový a transformace Φ je proto regulární.

Základní funkční identita je $u(x) = y^{1-\alpha}(x)$. Zderivujeme základní identitu podle parametru x a dostaneme $\dot{u}(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}(x)y'(x)$. Z těchto vztahů lze dosadit do rovnice (1.28) za $y^{1-\alpha}(x)$ a $y^{-\alpha}(x)y'(x)$, čímž dostaneme

$$\frac{1}{1-\alpha}\dot{u}(t) + p(t)u(t) = q(t),$$

odkud po snadné úpravě

$$\dot{u}(t) + (1-\alpha)p(t)u(t) = (1-\alpha)q(t). \tag{1.29}$$

To je ovšem lineární diferenciální rovnice s pravou stranou (typu (1.23)).

Věta 1.37. *Nechť $\alpha \neq 0, 1$, $p = p(x)$ a $q = q(x)$ jsou spojité na (a, b), $q(x) \not\equiv 0$ na (a, b).*

(I) Nechť $u = u(t)$ řeší rovnici (1.29). Pak každá funkce $y = y(x)$ daná na $I \subset (a, b)$ vztahem $y^{1-\alpha}(x) = u(x)$, $y(x) \neq 0$ na I, a mající derivaci y' na I, řeší rovnici (1.28) na I.

(II) Pokud $y = y(x)$ je řešení rovnice (1.28) na $I \subset (a, b)$ takové, že $y(x) \neq 0$ na I, pak funkce $u(t) = y^{1-\alpha}(t)$ je na intervalu I řešení rovnice (1.29).

Důkaz. Věta je důsledkem předchozí poznámky a existenční věty pro (1.29). □

Poznámka 1.38. Případná platnost řešení vně I (v rámci (a, b)) se ověřuje na základě konkrétní podoby rovnice (1.28).

Příklad 1.39. Mějme rovnici

$$xy' - y = x^2 y^{-1},$$

která je ještě v o něco obecnějším tvaru než rovnice (1.28) (y' je násobeno proměnnou x). Jinak rovnice opovídá tvarem rovnici (1.28), kde $\alpha = -1$. Odtud ovšem plyne, že $y(x) \equiv 0$ nemůže být řešením této rovnice. Na řešení máme podmínku $y(x) \neq 0$ pro všechna x z relevantního rozsahu, který eventuelně najdeme během řešení rovnice.

Násobení rovnice závisle proměnnou y vede na tvar

$$xyy' - y^2 = x^2.$$

Provedeme regulární substituci $\Phi : (x, y) \mapsto (u, t)$ takovou, že $t = x$ a $u = y^2$. Základní funkční identita je potom $u(x) = y^2(x)$ a pro derivaci dostáváme $\dot{u}(x) = 2y(x)y'(x)$. Po dosazení do původní rovnice dostáváme lineární diferenciální rovnici s pravou stranou

$$\frac{t}{2}\dot{u}(t) - u(t) = t^2,$$

kterou řešíme standardním postupem z odstavce 1.6, tj. separací a metodou variace konstanty.

Pro rovnici bez pravé strany dostáváme

$$\frac{t}{2}\dot{u}(t) - u(t) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\dot{u}}{u} = \frac{2}{t}.$$

Funkce u pak zřejmě musí vyhovovat rovnici $\ln|u| = 2\ln|t| + C$, kde $C \in \mathbb{R}$ a tedy

$$u(t) = Dt^2, \qquad \text{kde } D \neq 0.$$

Řešení rovnice s pravou stranou pak předpokládáme ve tvaru

$$u(t) = D(t)t^2.$$

Řešení dosadíme do příslušné rovnice, čímž obdržíme rovnost

$$\frac{t}{2}(\dot{D}(t)t^2 + D(t)2t) - D(t)t^2 = t^2.$$

Pro derivaci $\dot{D}(t)$ jsme tedy dostali $\dot{D}(t) = 2/t$. Integrace právě uvedené rovnosti vede na

$$D(t) = 2\ln|t| + E, \qquad \text{kde } E \in \mathbb{R}.$$

Potom zřejmě $u(t) = (\ln t^2 + E)t^2$ a po zpětném dosazení

$$y(x) = |x|\sqrt{\ln x^2 + E},$$

kde definiční obor y je dán konstantou E a bodem $x = 0$. Zřejmě totiž $x \neq 0$, protože v bodě $x = 0$ nemá funkce y derivaci a zároveň požadavek $y(x) \neq 0$ vede na podmínku $\ln x^2 + E > 0$.

1.8 Riccatiho diferenciální rovnice

Definice 1.40. Nechť funkce $a_0 = a_0(x)$, $a_1 = a_1(x)$, $a_2 = a_2(x)$ jsou spojité na (a, b). Pak rovnice ve tvaru

$$y' = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 \qquad \text{na } (a, b) \tag{1.30}$$

se nazývá **Riccatiho[2] diferenciální rovnice 1. řádu**.

Poznámka 1.41. Pro $a_0(x) \equiv 0$ je (1.30) Bernoulliho rovnice (s $\alpha = 2$). Pro $a_2(x) \equiv 0$ je (1.30) lineární diferenciální rovnice s pravou stranou.

Poznámka 1.42. Z pozdější existenční teorie vyplyne, že počáteční úloha

$$\begin{aligned} y' &= a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

má jednoznačné řešení.

Riccatiho rovnice je analyticky řešitelná v případech, které uvedeme dále.

Poznámka 1.43. **Pokus o úpravy rovnice (1.30).**

1. **Záměna nezávisle proměnné.**

   Provedeme transformaci $\Phi : (t, u) \mapsto (x, y)$ definovanou vztahem

   $$\Phi\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ u \end{pmatrix}.$$

[2] **Jacopo Francesco Riccati** (1676–1754), italský matematik.

Za účelem ověření regularity Φ sestavíme matici derivace Φ v bodě (t,u) a spočteme její determinant

$$\Phi'\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot\varphi(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \det \Phi'\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \dot\varphi(t)$$

Vidíme, že uvažovaná transformace je regulární právě tehdy, když $\dot\varphi(t) \neq 0$.

Sestavíme základní funkční identitu $y\big(\varphi(t)\big) = u(t)$, odkud $y'\big(\varphi(t)\big)\dot\varphi(t) = \dot u(t)$. Uvedené vztahy dosadíme do (1.30) a po vynásobení $\dot\varphi(t)$ dostaneme

$$\dot u(t) = \dot\varphi(t)a_0\big(\varphi(t)\big) + \dot\varphi(t)a_1\big(\varphi(t)\big)u(t) + \dot\varphi(t)a_2\big(\varphi(t)\big)u^2(t),$$

což je opět rovnice ve tvaru (1.30). Vidíme tedy, že libovolné přeškálování nezávisle proměnné vede opět k Riccatiho rovnici.

2. **Substituce závisle proměnné.**

Zavedeme substituci

$$\Phi\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \frac{\alpha u+\beta}{\gamma u+\delta} \end{pmatrix},$$

kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jsou spojité funkce proměnné t, na které dále klademe požadavek

$$\begin{vmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

U transformace Φ je jako obvykle třeba ověřit regularitu. Matice derivace zobrazení Φ je

$$\Phi'\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\alpha u+\beta}{\gamma u+\delta}\right) & \frac{\alpha(\gamma u+\delta)-\gamma(\alpha u+\beta)}{(\gamma u+\delta)^2} \end{pmatrix}.$$

Odtud plyne požadavek

$$\det \Phi'\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \frac{\alpha(\gamma u+\delta)-\gamma(\alpha u+\beta)}{(\gamma u+\delta)^2} = \frac{\alpha\delta-\gamma\beta}{(\gamma u+\delta)^2} \neq 0.$$

Základní funkční identita je

$$y(x) = \frac{\alpha(x)u(x)+\beta(x)}{\gamma(x)u(x)+\delta(x)}$$

a pro derivaci tedy dostaneme

$$\begin{aligned} y'(x) \quad = \quad & \frac{\big[\alpha'(x)u(x)+\alpha(x)u'(x)+\beta'(x)\big]\big[\gamma(x)u(x)+\delta(x)\big]}{\big[\gamma(x)u(x)+\delta(x)\big]^2} - \\ & - \frac{\big[\alpha(x)u(x)+\beta(x)\big]\big[\gamma'(x)u(x)+\gamma(x)u'(x)+\delta'(x)\big]}{\big[\gamma(x)u(x)+\delta(x)\big]^2}. \end{aligned}$$

Z posledních dvou vztahů dosadíme do (1.30) a pro pravou stranu rovnice obdržíme vztah

$$\text{R.H.S.} = a_0(t) + a_1(t)\frac{\alpha(t)u(t)+\beta(t)}{\gamma(t)u(t)+\delta(t)} + a_2(t)\left(\frac{\alpha(t)u(t)+\beta(t)}{\gamma(t)u(t)+\delta(t)}\right)^2.$$

Po vynásobení celé rovnice nenulovým výrazem $(\gamma u+\delta)^2$ a zřejmé úpravě dostaneme

$$\begin{aligned}(\alpha\delta-\gamma\beta)u' &= (-\beta'\delta+\beta\delta'+a_0\delta^2+a_1\beta\delta+a_2\beta^2)+\\ &+(-\alpha'\delta+\beta\gamma'-\beta'\gamma+\alpha\delta'+2a_0\gamma\delta+a_1\alpha\delta+a_1\beta\gamma+2a_2\alpha\beta)u+\\ &+(-\alpha'\gamma+\alpha\gamma'+a_0\gamma^2+a_1\alpha\gamma+a_2\alpha^2)u^2.\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že podle předpokladu $\alpha\delta-\gamma\beta\neq 0$, je výsledná rovnice opět ve tvaru (1.30).

3. **Kanonický tvar Riccatiho rovnice.**

Definice 1.44. Rovnice (1.30) má **kanonický tvar**, právě když

$$\Big(\forall x\in(a,b)\Big)\Big(a_2(x)=\pm 1\wedge a_1(x)\equiv 0\Big).$$

Převod rovnice (1.30) do kanonického tvaru provedeme pomocí substituce

$$\Phi\begin{pmatrix}t\\u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\\omega(t)u+\alpha(t)\end{pmatrix}.$$

Protože

$$\Phi'\begin{pmatrix}t\\u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\\dot\omega(t)u+\dot\alpha(t)&\omega(t)\end{pmatrix}\qquad\Longrightarrow\qquad\det\Phi'\begin{pmatrix}t\\u\end{pmatrix}=\omega(t),$$

plyne z požadavku na regularitu Φ podmínka $\omega(t)\neq 0$.

Základní funkční identita je $y(x)=\omega(x)u(x)+\alpha(x)$, odkud pro derivaci dostaneme $y'(x)=\omega'(x)u(x)+\omega(x)u'(x)+\alpha'(x)$. Z těchto vztahů dosadíme do původní rovnice (1.30) a získáme vztahy

$$\begin{aligned}\text{L.H.S.} &= \omega'(t)u(t)+\omega(t)u'(t)+\alpha'(t),\\ \text{R.H.S.} &= a_0(t)+a_1(t)\omega(t)u(t)+a_1(t)\alpha(t)+a_2(t)\omega^2(t)u^2(t)+\\ &\quad+2a_2(t)\alpha(t)\omega(t)u(t)+a_2(t)\alpha^2(t).\end{aligned}$$

Po zřejmých úpravách pak dostaneme

$$\begin{aligned}u'(t) &= \frac{1}{\omega(t)}\Big(\big[a_0(t)+a_1(t)\alpha(t)+a_2(t)\alpha^2(t)-\alpha'(t)\big]+\\ &\quad+\big[a_1(t)\omega(t)+2a_2(t)\alpha(t)\omega(t)-\omega'(t)\big]u(t)+\\ &\quad+a_2(t)\omega^2(t)u^2(t)\Big).\end{aligned}$$

Při převodu do kanonického tvaru jsme podle definice požadovali splnění následujících dvou podmínek

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega(t)}a_2(t)\omega^2(t) &= \pm 1,\\ a_1(t)\omega(t)+2a_2(t)\alpha(t)\omega(t)-\omega'(t) &= 0.\end{aligned}$$

Odtud pro neznámé funkce $\omega(t)$ a $\alpha(t)$ plynou vztahy

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \pm\frac{1}{a_2(t)},\\ \alpha(t) &= \frac{1}{2}\left[-\frac{a_1(t)}{a_2(t)}+\left(\frac{1}{a_2(t)}\right)'\right].\end{aligned}$$

Věta 1.45 (Řešení Riccatiho rovnice při znalosti jednoho řešení)**.** *Nechť* $y_1 = y_1(x)$ *je řešení* (1.30) *na* (a, b)*. Pak ostatní řešení lze najít integrací (řešením) lineární rovnice s pravou stranou.*

Důkaz. Nechť funkce $y_1 = y_1(x)$ řeší rovnici (1.30) na (a, b). Hledáme nějaké jiné řešení $y \neq y_1$. Provedeme substituci $x = t$ a $u = 1/(y - y_1)$, tj.

$$\Phi\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ \frac{1}{y-y_1(x)}\end{pmatrix}.$$

Opět nás zajímá regularita této transformace. Proto sestavíme matici derivace Φ

$$\Phi'\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{y_1'(x)}{(y-y_1(x))^2} & -\frac{1}{(y-y_1(x))^2}\end{pmatrix}.$$

Odtud zřejmě $\det\Phi'\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = -\dfrac{1}{\left(y-y_1(x)\right)^2} \neq 0$ a tedy transformace Φ je regulární.

Základní funkční identita je

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{u(x)}$$

a její derivací podle proměnné x dostaneme

$$y'(x) = y_1'(x) - \frac{1}{u^2(x)}\dot{u}(x).$$

Dosadíme-li z obou uvedených vztahů za y a y' v rovnici (1.30), dostaneme

$$y_1'(x) - \frac{1}{u^2(x)}\dot{u}(x) = a_0(x) + a_1(x)\left(y_1(x) + \frac{1}{u(x)}\right) + a_2(x)\left(y_1^2(x) + 2\frac{y_1(x)}{u(x)} + \frac{1}{u^2(x)}\right).$$

Při dalších úpravách poslední rovnosti si uvědomíme, že podle předpokladů platí $y_1'(x) = a_0(x) + a_1(x)y_1(x) + a_2(x)y_1^2(x)$. Rovněž také víme, že $u(x) \neq 0$ a lze tedy celou rovnost vynásobit výrazem $-u^2(x)$, čímž získáme

$$\dot{u}(x) = -a_1(x)u(x) - 2a_2(x)y_1(x)u(x) - a_2(x).$$

Odtud, po drobných úpravách a záměně $t = x$, vyplývá rovnost

$$\dot{u}(t) + \Big[a_1(t) + 2a_2(t)y_1(t)\Big]u(t) = -a_2(t)$$

Tato rovnice je lineární diferenciální s pravou stranou a lze ji řešit obvyklým postupem. Tím je ovšem věta dokázána. □

Příklad 1.46. Řešme diferenciální rovnici

$$y' = 2x + x^3 y - xy^2.$$

Jedná se zřejmě o Riccatiho rovnici pro $a_0(x) = 2x$, $a_1(x) = x^3$ a $a_2(x) = -x$. Můžeme si také všimnout, že funkce $y_1(x) = x^2$ řeší na $\mathbb{R}$ tuto rovnici. Potom lze postupovat podle důkazu předchozí věty a regulární substitucí $t = x$ a $u = 1/(y - y_1(x))$ převést rovnici do tvaru

$$\dot{u} - t^3 u = t,$$

což je lineární diferenciální rovnice 1. řádu s pravou stranou. Tu už umíme snadno vyřešit. Jejím řešením je

$$u(t) = \left[\int t \exp\left\{-\frac{t^4}{4}\right\} \mathrm{d}t + \alpha\right] \exp\left\{\frac{t^4}{4}\right\}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Nyní stačí provést zpětnou substituci, čímž dostaneme

$$y(x) = x^2 + \frac{1}{u(x)} = x^2 + \left[\int x \exp\left\{-\frac{x^4}{4}\right\} \mathrm{d}x + \alpha\right]^{-1} \exp\left\{-\frac{x^4}{4}\right\},$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$. Nalezli jsme tedy jedno řešení $y_1(x) = x^2$ a všechna ostatní řešení jsme dostali ve tvaru $y(x)$.

Věta 1.47 (Převod na LDR 2. řádu)**.** *Nechť $a_0 = a_0(x)$, $a_1 = a_1(x)$, $a_2 = a_2(x)$ a $a_2'(x)$ jsou spojité na (a, b) a $a_2(x) \neq 0$.*

(I) Nechť $y = y(x)$ řeší (1.30). Pak funkce

$$u(x) = \exp\left\{-\int a_2(x) y(x) \mathrm{d}x\right\}$$

řeší rovnici

$$a_2(t)\ddot{u} - \left[a_2'(t) + a_1(t)a_2(t)\right]\dot{u} + a_0(t)a_2^2(t)u = 0 \tag{1.31}$$

na intervalu $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$.

(II) Nechť naopak $u = u(t)$ řeší (1.31) na $(\gamma, \delta) \subset (a, b)$, $u(t) \neq 0$ $\forall t \in (\gamma, \delta)$. Pak funkce

$$y(x) = -\frac{\dot{u}(x)}{a_2(x)u(x)}$$

řeší původní rovnici (1.30) na intervalu (γ, δ).

Důkaz.

(I) Nechť $y = y(x)$ řeší (1.30). Provedeme funkcionální substituci ve tvaru

$$u(t) = \exp\left\{-\int a_2(x) y(x) \mathrm{d}x\Big|_{x=t}\right\}.$$

Uvedený vztah zároveň představuje funkční identitu. Abychom mohli dosadit do rovnice (1.30), musíme si z funkční identity vyjádřit y a y'. Zřejmě tedy

$$\dot{u}(t) = \Big[-a_2(t)y(t)\Big] \exp\left\{ -\int a_2(x)y(x)\mathrm{d}x\bigg|_{x=t} \right\},$$

a protože $a_2(t) \neq 0$ lze psát

$$y(t) = -\frac{\dot{u}(t)}{a_2(t)} \underbrace{\exp\left\{ \int a_2(x)y(x)\mathrm{d}x \right\}}_{=\frac{1}{u(t)}} = -\frac{\dot{u}(t)}{a_2(t)u(t)}.$$

Pro y' dostaneme

$$y'(t) = -\frac{\ddot{u}(t)a_2(t)u(t) - \dot{u}(t)a_2'(t)u(t) - \big(\dot{u}(t)\big)^2 a_2(t)}{\big(a_2(t)u(t)\big)^2}.$$

Vzhledem k tomu, že $a_2(t) \neq 0$ (podle předpokladu) a $u(t) \neq 0$ (u je exponenciela), lze rovnici (1.30) po dosazení za y a y' násobit výrazem $\big(a_2(t)u(t)\big)^2$. Po snadných úpravách pak dostáváme výslednou rovnost

$$a_2(t)\ddot{u}(t) - \Big[a_2'(t) + a_1(t)a_2(t)\Big]\dot{u}(t) + a_0(t)a_2^2(t)u(t) = 0.$$

Funkce $u = u(t)$ tedy řeší rovnici (1.31), což jsme chtěli dokázat.

(II) Nechť naopak $u = u(t)$ řeší rovnici (1.31) na $(\gamma, \delta) \subset (a, b)$, $u(t) \neq 0\ \forall t \in (\gamma, \delta)$. Funkce u řeší diferenciální rovnici 2. řádu a je tudíž dvakrát diferencovatelná. Položme

$$y(x) = -\frac{\dot{u}(x)}{a_2(x)u(x)}$$

a podle postupu v předchozí části důkazu zpětně snadno ověříme, že $y = y(x)$ řeší rovnici (1.30) na (γ, δ). □

Poznámka 1.48. **Speciální tvar Riccatiho rovnice** je

$$y' + ay^2 = bx^\alpha, \qquad \text{kde } a, b \neq 0,\ \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1.32}$$

Pro následující volby parametrů umíme rovnici (1.32) řešit analyticky:

1. Nechť $\alpha = 0$. Potom je rovnice (1.32) separovatelná.
2. Nechť $\alpha = -2$. Potom má rovnice (1.32) tvar

$$y' + ay^2 = \frac{b}{x^2}.$$

Provedeme substituci $\Phi : (t, u) \mapsto (x, y)$, takovou, že $x = t$ a $y = 1/u$. Ověříme její regularitu

$$\Phi' \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/u^2 \end{pmatrix}.$$

Potom $\det \Phi' \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{u^2} \neq 0$, a tedy transformace je regulární.

Základní funkční identita má tvar

$$y(x) = \frac{1}{u(x)},$$

odkud

$$y'(x) = -\frac{1}{u^2(x)}\dot{u}(x).$$

Dosadíme do rovnice (1.32) za y a y' a po zřejmých úpravách dostáváme

$$\dot{u}(t) - a + b\frac{u^2(t)}{t^2} = 0.$$

Tato rovnice je ve tvaru (1.9), kde $P(t,u) = -a + bu^2/t^2$ a $Q(t,u) = 1$. Snadno ověříme, že se jedná o rovnici homogenní stupně 0.

3. Pro některé další hodnoty parametru α (které určíme později), lze s výhodou zavést substituci tvaru

$$y = \omega u + \delta,$$

kde $\omega = \omega(t)$ a $\delta = \delta(t)$ jsou zatím neznámé funkce. Už víme, že tato substituce převádí Riccatiho rovnici v jinou Riccatiho rovnici (viz poznámka 1.43). Budeme požadovat, aby tato nová Riccatiho rovnice byla opět ve speciálním tvaru (1.32). Regularitu navrhované substituce jsme již ověřili (poznámka 1.43). V tomto speciálním případě vede požadavek na regularitu k podmínce $\omega(t) \neq 0$.

Základní funkční vztah máme ve tvaru

$$y(t) = \omega(t)u(t) + \delta(t)$$

a pro derivaci y' platí

$$y'(t) = \dot{\omega}(t)u(t) + \omega(t)\dot{u}(t) + \dot{\delta}(t).$$

Po dosazení a úpravě původní rovnice (1.32) dostáváme

$$\omega\dot{u} + (\dot{\omega} + 2a\omega\delta)u + a\omega^2u^2 = bt^\alpha - \dot{\delta} - a\delta^2. \tag{1.33}$$

Má-li být uvedená rovnice opět ve tvaru (1.32), musí být zřejmě splněny podmínky

$$\begin{aligned} \dot{\omega} + 2a\omega\delta &= 0, \\ \dot{\delta} + a\delta^2 &= 0. \end{aligned}$$

Tyto podmínky představují soustavu diferenciálních rovnic a funkce ω a δ musí být jejím řešením. Druhá rovnice je separovatelná a snadno ověříme, že jejím řešením je např. funkce $\delta(t) = 1/at$. Dosadíme-li nalezenou funkci δ do první rovnice, převedeme ji tím rovněž na rovnici separovatelnou a opět snadno ověříme, že funkce $\omega(t) = 1/t^2$ této rovnici vyhovuje.

Nyní jsme určili původně neznámé funkce ω a δ a naše substituce má tedy tvar

$$y = \frac{1}{t^2}u + \frac{1}{at}.$$

Pokračujeme v úpravách rovnice (1.33), kterou po dosazení za $\omega(t)$ a $\delta(t)$ a vynásobení nenulovým výrazem t^2 převedeme do tvaru

$$\dot{u} + \frac{a}{t^2}u^2 = bt^{\alpha+2}, \tag{1.34}$$

což je sice Riccatiho rovnice, ale stále není v požadovaném speciálním tvaru. Provedeme proto další substituci $\Phi : (t, u) \mapsto (s, w)$ definovanou vztahem

$$\Phi \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{\alpha+3} \\ 1/u \end{pmatrix}.$$

Obvyklým způsobem vyšetříme regularitu transformace Φ. Tak zjistíme, že transformace Φ je regulární právě tehdy, když $(\alpha+3)t^{\alpha+2}/u^2 \neq 0$. Zřejmě tedy musí platit, že $\alpha \neq -3$, $t \neq 0$ (splnění této podmínky již ale máme zajištěno) a $u \neq 0$.

Základní funkční identita je

$$w\big(t^{\alpha+3}\big) = \frac{1}{u(t)}$$

a její derivací podle proměnné t získáme

$$w'\big(t^{\alpha+3}\big)(\alpha+3)t^{\alpha+2} = -\frac{1}{u^2(t)}\dot{u}(t).$$

Z posledních dvou vztahů vyjádříme $u(t)$ a $\dot{u}(t)$ a dosadíme do rovnice (1.34), čímž získáme

$$-\frac{1}{w^2}w'(\alpha+3)t^{\alpha+2} + \frac{a}{t^2}\frac{1}{w^2} = bt^{\alpha+2},$$

odkud po snadných úpravách získáme

$$w' + \frac{b}{\alpha+3}w^2 = \frac{a}{\alpha+3}t^{-\alpha-4}.$$

V poslední rovnici ještě přejdeme od t k s

$$w' + \frac{b}{\alpha+3}w^2 = \frac{a}{\alpha+3}s^{-\frac{\alpha+4}{\alpha+3}}. \tag{1.35}$$

Poslední rovnice již je v požadovaném speciálním tvaru (1.32). Můžeme si všimnout, že při transformaci proměnných se nám rovněž transformovaly koeficienty a a b, ale především exponent z α na $\alpha_1 = -(\alpha+4)/(\alpha+3)$.

Může se stát, že exponent α_1 je roven 0 nebo -2. Potom rovnici (1.35) umíme řešit. Pokud nenastane ani jeden z těchto případů, můžeme zopakovat předchozí postup, pomocí něhož dostaneme další exponent α_2. S tímto novým exponentem můžeme provést celou úvahu znovu. Cílem je odvodit přípustné hodnoty pro parametr α tak, aby po k krocích platilo, že $\alpha_k = 0$ nebo $\alpha_k = -2$. V těchto případech totiž umíme rovnici (1.32) po konečném počtu substitucí převést do tvaru, v němž ji umíme vyřešit. Za tím účelem nejdříve spočtěme

$$\alpha_1 + 2 = \frac{2\alpha + 6 - \alpha - 4}{\alpha+3} = \frac{\alpha+2}{\alpha+3}.$$

Z této rovnosti ovšem vyplývá, že požadavek $\alpha_1 = -2$ je splněn právě tehdy, když $\alpha = -2$. Úvahu lze zřejmě zobecnit i na α_k. V dalším se proto omezíme na požadavek $\alpha_k = 0$. Z předchozí rovnosti plyne

$$\frac{1}{\alpha_1 + 2} = \frac{\alpha + 3}{\alpha + 2} = 1 + \frac{1}{\alpha + 2}.$$

Snadno si rozmyslíme, že po k krocích dojdeme ke vztahu

$$\frac{1}{\alpha_k + 2} = 1 + \frac{1}{\alpha_{k-1} + 2} = \cdots = k + \frac{1}{\alpha + 2}.$$

Abychom odvodili podmínku na α položme $\alpha_k = 0$. Potom

$$\frac{1}{0 + 2} = k + \frac{1}{\alpha + 2},$$

odkud

$$\alpha = \frac{4k}{1 - 2k}, \qquad \text{kde } k \in \mathbb{N}.$$

Věta 1.49. *Pro hodnoty $\alpha \in \{4k/(1-2k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ lze rovnici (1.32) transformovat na rovnici separovatelnou pomocí opakovaného použití těchto dvou substitucí:*

$$y = \frac{1}{t^2} u + \frac{1}{at}, \quad x = t$$

a následně

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^{\alpha+3} \\ \frac{1}{u} \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Viz předchozí poznámka. □

Poznámka 1.50. Ve skutečnosti lze řeši pro všechna $\alpha \in \{-4k/(1+2k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$. (Vzniklo záměnou k na $-k$ v předchozí větě.) Pro k záporná provedu substituce podle předchozí věty, pro k kladná substituce inverzní. Pro ostatní α je dokázáno, že rovnice (1.32) nemá řešení v elementárních funkcích.

1.9 Diferenciální rovnice ve tvaru $x = f(y')$ a $y = g(y')$

Poznámka 1.51. Řešíme-li obecnou diferenciální rovnici 1. řádu

$$F(x, y, y') = 0,$$

obvykle se snažíme ji „rozřešit“ vzhledem k y'. To ale není vždy možné. V některých případech se ukazuje výhodné vyřešit tuto rovnici vzhledem k x nebo k y. Ve zvláštních případech se nám pak může podařit převést tuto rovnici do tvaru

$$x = f(y') \tag{1.36}$$

nebo

$$y = g(y'). \tag{1.37}$$

POZNÁMKA 1.52 (**Formální postup**, rovnice (1.36)). Řešení budeme hledat v parametrickém tvaru. Za tím účelem zavedeme parametr t tak, že $t = y'$ odkud

$$x = f(t)$$

což představuje parametrickou rovnici pro x. Nyní odvodíme, jak by mělo vypadat parametrické vyjádření y. Vyjdeme z rovnice $t = y'$, z níž plyne

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} t\mathrm{d}x,$$

kde předpokládáme, že $t = t(x)$. Položíme-li $y_0 = y(x_0)$ a $x_0 = f(t_0)$ a přejdeme-li v integrálu od proměnné x k proměnné t dostaneme

$$y(x(t)) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \tau f'(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Tato rovnice spolu s rovnicí $x(t) = f(t)$ představuje hledané řešení rovnice (1.36) v parametrickém tvaru.

V dalším textu budeme pro jednoduchost místo $y(x(t))$ psát jednoduše $y(t)$. Na závěr ještě dodejme, že aby uvedený postup byl korektní, je třeba zajistit splnění jistých předpokladů. Především je třeba zajistit proveditelnost substituce v integrálu a dále je třeba zjistit existenci inverzní funkce k funkci f. Následující věta nám zajistí splnění postačujících předpokladů, za kterých je uvedený postup správný.

Věta 1.53. *Nechť f má na intervalu (t_1, t_2) spojitou derivaci, která zde nemění znamení. Nechť $a = \inf\{f(t) \mid t \in (t_1, t_2)\}$ a $b = \sup\{f(t) \mid t \in (t_1, t_2)\}$. Pak každým bodem $[x_0, y_0] \in (a, b) \times \mathbb{R}$ prochází právě jedna integrální křivka $y = y(x)$ diferenciální rovnice*

$$x = f(y') \tag{1.36}$$

jejíž tečna v bodě $[x_0, y_0]$ má směrnici v intervalu (t_1, t_2), a která je řešením rovnice (1.36) na intervalu (a, b). Parametrické rovnice této křivky jsou

$$\begin{aligned} x(t) &= f(t), \\ y(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} \tau f'(\tau)\mathrm{d}\tau, \end{aligned}$$

kde $t_0 \in (t_1, t_2)$ takové, že $x_0 = f(t_0)$.

Důkaz. Z předpokladů plyne, že funkce f je na (t_1, t_2) spojitá a ryze monotónní a existuje k ní tedy inverzní funkce $h : (a, b) \overset{\text{na}}{\to} (t_1, t_2)$. Funkce h je na (a, b) také ryze monotónní, spojitá a má zde spojitou derivaci. Potom rovnici (1.36) lze rozřešit vzhledem k y' a platí

$$y' = h(x). \tag{1.38}$$

Rovnice (1.38) je rovnice se separovanými proměnnými a podle věty 1.10 prochází každým bodem $[x_0, y_0] \in (a, b) \times \mathbb{R}$ právě jedna integrální křivka

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} h(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{1.39}$$

Funkce $y(x)$ je řešením rovnice (1.38) na celém (a, b). Přitom rovnice (1.36) a (1.38) jsou ekvivalentní, protože pokud pro nějakou funkci $\varphi(x)$ platí $x = f(\varphi'(x))$, pak platí i $\varphi'(x) = h(x)$ a naopak. Každým bodem pásu $(a, b) \times \mathbb{R}$ tedy prochází právě jedna integrální křivka, která je řešením rovnice (1.36) na (a, b).

Hledáme parametrické vyjádření řešení $y(x)$. Zavedeme do integrálu v rovnici (1.39) substituci $\xi = f(t)$. Z vlastností funkce f plyne, že pro každé $x \in (a, b)$ existuje právě jedno $t \in (t_1, t_2)$ tak, že $f(t) = x$. Speciálně tedy i $f(t_0) = x_0$. Potom

$$y = y_0 + \int_{t_0}^{t} h(f(\tau))f'(\tau)\mathrm{d}\tau = y_0 + \int_{t_0}^{t} \tau f'(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Z poslední rovnice a z rovnice $\xi = f(t)$ dostáváme hledané parametrické vyjádření řešení $y(x)$ rovnice (1.36) na (a, b) ve tvaru

$$\begin{aligned} x(t) &= f(t), \\ y(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} \tau f'(\tau)\mathrm{d}\tau, \end{aligned}$$

kde $t \in (t_1, t_2)$. $\square$

Poznámka 1.54 (**Formální postup**, rovnice (1.37)). Řešení budeme opět hledat v parametrickém tvaru. Podobně jako v předchozím příkladě nejdřív naznačíme princip odvození tohoto parametrického vztahu, přičemž se nebudeme zabývat předpoklady, za kterých naše odvození platí. Posléze zformulujeme a dokážeme větu, která náš postup ospravedlní.

Položme $t = y'$. Potom rovnici (1.37) máme ve tvaru $y = g(t)$. Protože $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x = t$, pak za určitých předpokladů lze také psát $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y = 1/t$, odkud

$$x = x_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{1}{t(y)}\mathrm{d}y.$$

Položme $y_0 = g(t_0)$ a v integrálu proveďme substituci $y = g(t)$. Potom

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\tau} g'(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Hledaný parametrický popis řešení tedy je

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\tau} g'(\tau)\mathrm{d}\tau, \\ y(t) &= g(t). \end{aligned}$$

Věta 1.55. *Nechť g má na intervalu (t_1, t_2) spojitou derivaci, která zde nemění znamení. Nechť $0 \notin (t_1, t_2)$. Položme $\alpha = \inf\{g(t) \mid t \in (t_1, t_2)\}$ a $\beta = \sup\{g(t) \mid t \in (t_1, t_2)\}$. Potom každým bodem $[x_0, y_0] \in \mathbb{R} \times (\alpha, \beta)$ prochází právě jedna integrální křivka diferenciální rovnice*

$$y = g(y'), \tag{1.37}$$

jejíž směrnice tečny v $[x_0, y_0]$ leží v intervalu (t_1, t_2), a která je řešením rovnice (1.37) na intervalu (a, b), kde

$$\begin{aligned} a &= x_0 + \inf_{t\in(t_1,t_2)} \int_{t_0}^{t} \frac{g'(\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau, \\ b &= x_0 + \sup_{t\in(t_1,t_2)} \int_{t_0}^{t} \frac{g'(\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau, \\ y_0 &= g(t_0). \end{aligned}$$

Parametrické rovnice této křivky jsou

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{g'(\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau, \\ y(t) &= g(t). \end{aligned}$$

Důkaz. Z předpokladů plyne, že funkce g je ostře monotónní a spojitá na (t_1, t_2), přičemž $g(t_1, t_2) = (\alpha, \beta)$. Proto zde existuje i inverzní funkce h k funkci g, která je rovněž ostře monotónní a spojitá taková, že $h(\alpha, \beta) = (t_1, t_2)$. Funkce h má na (α, β) také spojitou derivaci. Rovnici (1.37) lze přepsat do tvaru

$$y' = h(y), \tag{1.40}$$

což je separovatelná rovnice. Protože $0 \notin (t_1, t_2)$, pak $h(y) \neq 0$ na (α, β) a tato rovnice je ekvivalentní s rovnicí

$$\frac{y'}{h(y)} = 1.$$

Potom každým bodem množiny $\mathbb{R} \times (\alpha, \beta)$ prochází právě jedna integrální křivka rovnice (1.40). Řešením rovnice (1.40) je pak každá diferencovatelná funkce implicitně zadaná rovnicí

$$x + c = \int \frac{1}{h(y)}\mathrm{d}y, \qquad \text{kde } c \in \mathbb{R}.$$

Bodem $[x_0, y_0] \in \mathbb{R} \times (\alpha, \beta)$ prochází zřejmě integrální křivka určená rovnicí

$$x - x_0 = \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}\upsilon}{h(\upsilon)}. \tag{1.41}$$

Vzhledem k tomu, že g a h jsou inverzní funkce, jsou rovnice (1.37) a (1.40) ekvivalentní. Bodem $[x_0, y_0]$ prochází tedy také právě jedna integrální křivka rovnice (1.37), která je implicitně zadána rovnicí (1.41).

V integrálu v rovnici (1.41) zavedeme substituci $v = g(t)$, čímž dostaneme

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{h(g(\tau))} g'(\tau) \mathrm{d}\tau = x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{g'(\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau,$$

kde $t_0 \in (t_1, t_2)$ takové, že $y_0 = g(t_0)$. Parametrické rovnice integrální křivky (1.41) jsou tedy

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{g'(\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau, \\ y(t) &= g(t). \end{aligned}$$

Tato křivka je integrální křivkou rovnice (1.37) na intervalu (a, b), kde

$$a = x_0 + \inf_{t \in (t_1, t_2)} \int_{t_0}^{t} \frac{g'(\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau \qquad \text{a} \qquad b = x_0 + \sup_{t \in (t_1, t_2)} \int_{t_0}^{t} \frac{g'(\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau. \qquad \square$$

Příklad 1.56. Řešme rovnici

$$(y')^3 + y' - x = 0.$$

Rovnici lze zřejmě přepsat do tvaru

$$x = (y')^3 + y',$$

a je tedy tvaru (1.36). Provedeme substituci $y' = t$, odkud

$$x = f(t) = t^3 + t.$$

Funkce f je zřejmě ostře rostoucí na $\mathbb{R}$ a má zde spojitou derivaci. Tím máme splněny předpoklady věty 1.53 ($a = -\infty$ a $b = +\infty$), a parametrické rovnice řešení jsou tedy

$$\begin{aligned} x(t) &= t^3 + t, \\ y(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} \tau(3\tau^2 + 1) \mathrm{d}\tau = \\ &= y_0 - \frac{1}{2} t_0^2 - \frac{3}{4} t_0^4 + \frac{1}{2} t^2 + \frac{3}{4} t^4, \qquad \text{kde } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$