1 Kuželosečky, polární souřadnice a parametrické křivky

Zkouškové příklady

1.1 Kuželosečky

1. Napište rovnici paraboly, když znáte $V = (0, 0), F = (2, 0)$. $[y^2 = 8x]$
2. Napište rovnici paraboly, když znáte $V = (-1, 3), F = (-1, 0)$. $[(x+1)^2 = -12(y-3)]$
3. Napište rovnici paraboly, když znáte $F = (1, 1), d : y = -1$. $[4y = (x-1)^2]$
4. Napište rovnici paraboly, když znáte $F = (1, 1), d : x = 2$. $[(y-1)^2 = -2(x-3/2)]$
5. Popište a načrtněte parabolu $y^2 = 2x$. $[V = (0, 0), F = (1/2, 0), d : x = -1/2]$
6. Popište a načrtněte parabolu $2y = 4x^2 - 1$. $[V = (0, -1/2), F = (0, -3/8), d : y = -5/8]$
7. Popište a načrtněte parabolu $(x+2)^2 = 12 - 8y$. $[V = (-2, 3/2), F = (-2, -1/2), d : y = 7/2]$
8. Popište a načrtněte parabolu $x = y^2 + y + 1$. $[V = (3/4, -1/2), F = (1, -1/2), d : x = 1/2]$
9. Nalezněte rovnice všech parabol, které prochází bodem $(5, 6)$, mají řídící přímku $y = 1$ a osu $x = 2$. $[2y = x^2 - 4x + 7;\ 18y = x^2 - 4x + 103]$
10. Nalezněte rovnici paraboly, která má horizontální osu, vrchol $V = (-1, 1)$ a prochází bodem $(-6, 13)$.
11. Napište rovnici elipsy, když znáte (a je hlavní poloosa): $F_1 = (-1, 0), F_2 = (1, 0), a = 3$. $[\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1]$
12. Napište rovnici elipsy, když znáte (a je hlavní poloosa): $F_1 = (1, 3), F_2 = (1, 9), a = 5$. $[\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-6)^2}{25} = 1]$
13. Napište rovnici elipsy, když znáte (a je hlavní poloosa): $S = (1, 3), F_1 = (1, 1), a = 5$. $[\frac{(x-1)^2}{21} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1]$
14. Napište rovnici elipsy, když znáte (a je hlavní poloosa): $a = 5, V_1 = (3, 2), V_2 = (3, -4)$. $[\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1]$
15. Popište a načrtněte elipsu $3x^2 + 2y^2 = 12$. $[S = (0, 0), F = (0, \pm\sqrt{2}), a = \sqrt{6}, b = 2]$
16. Popište a načrtněte elipsu $4x^2 + 9y^2 - 18y = 27$. $[S = (0, 1), F = (\pm\sqrt{5}, 1), a = 3, b = 2]$
17. Popište a načrtněte elipsu $4(x-1)^2 + y^2 = 64$. $[S = (1, 0), F = (1, \pm 4\sqrt{3}), a = 8, b = 4]$
18. Nalezněte rovnice hyperboly, když znáte $F_1 = (0, -13), F_2 = (0, 13), a = 5$. $[\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1]$
19. Nalezněte rovnice hyperboly, když znáte $F_1 = (-5, 1), F_2 = (5, 1), a = 3$. $[\frac{x^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1]$

20. Nalezněte rovnice hyperboly, když znáte $F_1 = (-1,-1), F_2 = (-1,1), a = 1/4$.

$[16y^2 - \frac{16}{15}(x+1)^2 = 1]$

21. Popište a načrtněte hyperbolu $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$.

$[S = (0,0), a = 3, V = (\pm 3, 0), F = (\pm 5, 0), y = \pm\frac{4}{3}x]$

22. Popište a načrtněte hyperbolu $\dfrac{(x-1)^2}{9} - \dfrac{(y-3)^2}{16} = 1$.

$[S = (1,3), a = 3, V_1 = (4,3), V_2 = (-2,3), F_1 = (6,3), F_2 = (-4,3), y = \pm\frac{4}{3}(x-1)+3]$

23. Popište a načrtněte hyperbolu $4x^2 - 8x - y^2 + 6y - 1 = 0$.

$[S = (1,3), a = 2, V_1 = (1,5), V_2 = (1,1), F_{1,2} = (1, 3 \pm \sqrt{5}), y = 2x+1, y = -2x+5]$

24. Popište a načrtněte kuželosečku $x^2 - 4y^2 - 10x + 41 = 0$.

$[S = (5,0), a = 2, V = (5, \pm 2), F = (5, \pm 2\sqrt{5}), y = \pm\frac{1}{2}(x-5)]$

25. Popište a načrtněte kuželosečku $x^2 + 3y^2 + 6x + 8 = 0$.

26. Popište a načrtněte kuželosečku $y^2 + 4y + 2x + 1 = 0$. $[V = (\frac{3}{2}, -2), F = (1,-2), d : x = 2]$

27. Popište a načrtněte kuželosečku $9x^2 + 25y^2 + 100y + 99 = 0$.

$[S = (0,-2), F = (\pm\frac{4}{15}, -2), a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{5}]$

28. Popište a načrtněte kuželosečku $7x^2 - 5y^2 + 14x - 40y = 118$.

29. Popište a načrtněte kuželosečku $(x^2 - 4y)(4x^2 + 9y^2 - 36) = 0$.

1.2 Polární souřadnice

30. Převeďte z polárních do kartézských souřadnic $\left[3, \dfrac{1}{2}\pi\right]_p$. $[[0,3]_k]$

31. Převeďte z polárních do kartézských souřadnic $[-1, -\pi]_p$. $[[1,0]_k]$

32. Převeďte z polárních do kartézských souřadnic $\left[-3, -\dfrac{1}{3}\pi\right]_p$. $[\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right]_k]$

33. Převeďte z polárních do kartézských souřadnic $\left[3, -\dfrac{1}{2}\pi\right]_p$. $[[0,-3]_k]$

34. Napište všechna vyjádření v polárních souřadnicích bodu $[0,1]_k$.

$[\left[1, \frac{1}{2}\pi + 2k\pi\right]_p = \left[-1, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]_p]$

35. Napište všechna vyjádření v polárních souřadnicích bodu $[-3,0]_k$.

$[[3, \pi + 2k\pi]_p = [-3, 2k\pi]_p]$

36. Napište všechna vyjádření v polárních souřadnicích bodu $[2,-2]_k$.

$[\left[2\sqrt{2}, \frac{7}{4}\pi + 2k\pi\right]_p = \left[-2\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right]_p]$

37. Napište všechna vyjádření v polárních souřadnicích bodu $[4\sqrt{3}, 4]_k$.

$[\left[8, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]_p = [-8, \frac{7}{6}\pi + 2k\pi]_p]$

38. Prověřte symetrii křivky $r = 2 + \cos\varphi$. [dle osy x]

39. Prověřte symetrii křivky $r(\sin\varphi + \cos\varphi) = 1$. [není symetrická]

40. Prověřte symetrii křivky $r^2 \sin 2\varphi = 1$. [dle počátku (obou os)]

41. Prověřte v polárních souřadnicích symetrii křivky $x^2(y^2 - 1) = \dfrac{1}{4}$. [dle počátku a obou os]

42. Spočtěte plochu v křivce $r = a\cos\varphi; \varphi \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$. $[\frac{1}{4}\pi a^2]$

43. Spočtěte plochu v křivce $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}; \varphi \in [-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}]$. $[\frac{1}{2}a^2]$

44. Spočtěte plochu v křivce $r^2 = a^2 \sin^2\varphi$. $[\frac{1}{2}\pi a^2]$

45. Spočtěte plochu mezi křivkami $r = 2\cos\varphi, r = \cos\varphi; \varphi \in [0, \dfrac{\pi}{4}]$. $[\frac{3}{16}\pi + \frac{3}{8}]$

46. Spočtěte plochu mezi křivkami $r = a\left(4\cos\varphi - \dfrac{1}{\cos\varphi}\right); \varphi \in [0, \dfrac{\pi}{4}]$. $[\frac{5}{2}a^2]$

47. Spočtěte plochu mezi křivkami $r = e^{\varphi}, r = e^{\frac{\varphi}{2}}; \varphi \in [0, \pi]$. $[\frac{1}{4}(e^{2\pi} + 1 - e^{\pi})]$

48. Spočtěte plochu uvnitř $r = 4$ a napravo od křivky $r = \dfrac{2}{\cos\varphi}$. $[\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1}{2}(16 - \frac{4}{\cos^2\varphi})\mathrm{d}\varphi = \frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3}]$

49. Spočtěte plochu uvnitř $r = 4$ a $r = \frac{2}{\cos\varphi}$ pro $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

50. Spočtěte plochu vně $r = 1 + \cos\varphi$ a uvnitř $r = 2 - \cos\varphi$. $[2\pi + 3\sqrt{3}]$

1.3 Parametrické křivky

51. Nalezněte tečnu (tečny) ke křivce $x = 2t, y = \cos\pi t$ v bodě $t = 0$. $[y = 1]$

52. Nalezněte tečnu (tečny) ke křivce $x = t^2, y = (2 - t)^2$ v bodě $t = \frac{1}{2}$. $[3x + y - 3 = 0]$

53. Nalezněte tečnu (tečny) ke křivce $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$ v bodě $t = \frac{\pi}{4}$. $[2x + 2y - \sqrt{2} = 0]$

54. Nalezněte tečnu (tečny) ke křivce $r = 4 - 2\sin\varphi$ v bodě $\varphi = 0$. $[2x + y - 8 = 0]$

55. Nalezněte tečnu (tečny) ke křivce $r = \dfrac{4}{5 - \cos\varphi}$ v bodě $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. $[x - 5y + 4 = 0]$

56. Nalezněte tečnu (tečny) ke křivce $r = \dfrac{\sin\varphi - \cos\varphi}{\sin\varphi + \cos\varphi}$ v bodě $\varphi = 0$. $[x + 2y + 1 = 0]$

57. Nalezněte body, kde má křivka vertikální a horizontální tečny $x = 3t - t^3, y = t + 1$.

[vert. $[2, 2], [-2, 0]$]

58. Nalezněte body, kde má křivka vertikální a horizontální tečny $x = 3 - 4\sin t, y = 4 + 3\cos t$.

[horiz. $[3, 7], [3, 1]$, vert. $[-1, 4], [7, 4]$]

59. Nalezněte body, kde má křivka vertikální a horizontální tečny $x = t^2 - 2t, y = t^3 - 3t^2 + 2t$.

[horiz. $[-\frac{2}{3}, \pm\frac{2}{9}\sqrt{3}]$, vert. $[-1, 0]$]

60. Nalezněte body, kde má křivka vertikální a horizontální tečny $x = \cos t, y = \sin 2t$.

[horiz. $[\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}, \pm 1]$, vert. $[\pm 1, 0]$]

61. Spočtěte délku křivky $x = t^2, y = t^3; t \in [0, 1]$.

62. Spočtěte délku křivky $r = 2(1 + \cos\varphi)^{-1}; \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. $[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$

63. Spočtěte délku křivky $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}; \varphi \in [0, \pi]$. $[\frac{3}{2}\pi a]$

64. Spočtěte délku křivky $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t; t \in [0, \pi]$. $[\sqrt{2}(e^\pi - 1)]$

65. Spočtěte délku křivky $r = e^{2\varphi}; \varphi \in [0, 2\pi]$. $[\frac{1}{2}\sqrt{5}(e^{4\pi} - 1)]$

66. Spočtěte délku křivky $f(x) = \ln\left(\frac{1}{\cos x}\right); x \in [0, \frac{\pi}{4}]$. $[\ln(1 + \sqrt{2})]$

67. Spočtěte délku křivky $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}); x \in [1, 2]$. $[\frac{3}{2}]$

68. Spočtěte délku křivky $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t; t \in [0, 2\pi]$. [8]

69. Spočtěte délku křivky $x = \cos t + t \sin t, y = \sin t - t \cos t; t \in [0, 2\pi]$. $[2\pi^2]$

70. Spočtěte povrch rotačního tělesa (dle x) $y^2 = 2px; x \in [0, 4p]$. $[\frac{52}{3}\pi p^2]$

71. Spočtěte povrch rotačního tělesa (dle x) $6a^2xy = x^4 + 3a^4; x \in [a, 2a]$. $[\frac{47}{16}\pi a^2]$

72. Spočtěte povrch rotačního tělesa (dle x) $x = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}, y = t; t \in [3, 8]$. $[\frac{2152}{15}\pi]$

73. Spočtěte povrch rotačního tělesa (dle x) $r = e^\varphi; \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. $[[\frac{2}{5}\sqrt{2}\pi(2e^\pi + 1)]]$

74. Spočtěte povrch rotačního tělesa (dle x) $4y = x^3; x \in [0, 1]$. $[\frac{61}{432}\pi]$

75. Spočtěte povrch rotačního tělesa (dle x) $x = 2\cos t, y = 2\sin t; t \in [0, \frac{\pi}{6}]$. $[4\pi(2 - \sqrt{3})]$

76. Načrtněte a popište křivku $r = \frac{12}{2 + \sin\varphi}$.

77. Nalezněte body, ve kterých má křivka $x(t) = 3 - 4\sin t, y(t) = 4 + 3\sin t$ vertikální a horizontální tečny.

78. Určete plochu, která je společná křivkám $r = 2a\sqrt{3}\cos\varphi; \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ a $r = 2a\sin\varphi; \varphi \in [0, \pi]$.

79. Načrtněte křivku $r = \frac{9}{5 - 4\sin\varphi}$.

80. Načrtněte křivku $x(t) = 4t, y(t) = 3\sqrt{t^2 - 1}$.

81. Spočtěte délku křivky $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y; y \in [1, e]$. $[\frac{e^2+1}{4}]$

82. Spočtěte obsah plochy, která leží uvnitř křivky $r = 2\cos\varphi$ a vně křivky $r = 1$.

83. Spočtěte povrch rotačního tělesa (dle osy x) $x(t) = 2\cos t, y(t) = 2\sin t; t \in [0, \frac{\pi}{6}]$.

$[4\pi(2-\sqrt{3})]$

84. Nalezněte body, ve kterých má křivka $x(t) = 3 - 4\cos t, y(t) = 4 + 3\cos t$ vertikální a horizontální tečny.

85. Nalezněte body, ve kterých má křivka $x(t) = 3 + 4\sin t, y(t) = 4 - 3\cos t$ vertikální a horizontální tečny. Načrtněte křivku.