1 Supremum a infimum

Definice 1.1 (Spočetná množina)
Řekneme, že množina M je spočetná právě tehdy, když existuje funkce $f : \mathbb{N} \to M$, která je prostá a na, tj. $f(\mathbb{N}) = M$.

Definice 1.2 (Supremum)
Nejmenší horní závora množiny M se nazývá supremum M a značí $\sup M$.

Definice 1.3 (Infimum)
Největší dolní závora množiny M se nazývá infimum M a značí $\inf M$.

Věta 1.4 (O existenci suprema a infima)
Každá neprázdná shora, resp. zdola omezená množina $M \subset \mathbb{R}$ má své supremum, resp. infimum.

Věta 1.5 (O blízkosti suprema k M)
Buď $s = \sup M$. Pak $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in M)(s - \varepsilon < x \leq s)$.

Důkaz. Nerovnost $x \leq s$ plyne rovnou z definice suprema neb s je horní závora.
Nerovnost $s - \varepsilon < x$ dokážeme sporem. Nechť $\exists \varepsilon > 0$ tak, že $\forall x\ s - \varepsilon \geq x$. To je rovnou spor s tím, že s je nejmenší horní závora a přitom $s - \varepsilon$ je ještě menší než s. □

Věta 1.6 (O blízkosti infima k M)
Buď $i = \inf M$. Pak $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in M)(i \leq x < i + \varepsilon)$.

Důkaz. Důkaz se provede podobně jako v předchozí větě. □

Věta 1.7 (O supremu)
Buď M neprázdná a shora omezená množina. Potom existuje právě jedno číslo s takové, že platí:

1. vlastnost suprema : $(\forall x \in M)(x \leq s)$.
2. vlastnost suprema : $(\forall s' \in \mathbb{R})(s' < s)(\exists x \in M)(s' < x)$.

Věta 1.8 (O infimu)
Buď M neprázdná a zdola omezená množina. Potom existuje právě jedno číslo i takové, že platí:

1. vlastnost infima : $(\forall x \in M)(x \geq i)$.
2. vlastnost infima : $(\forall i' \in \mathbb{R})(i' > i)(\exists x \in M)(i' > x)$.