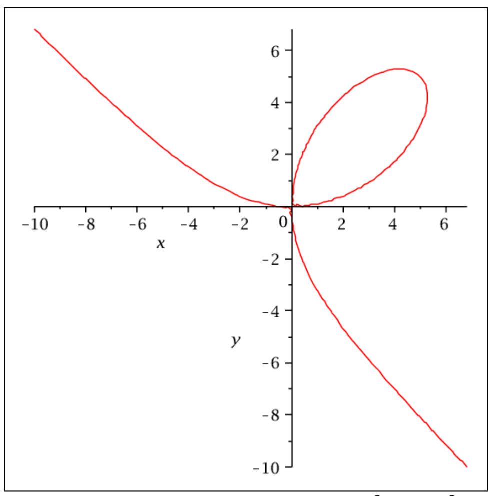
1 $\boxed{\text{Křivky dané parametricky}}$

1.1 Definice a příklady křivek a jejich parametrizace

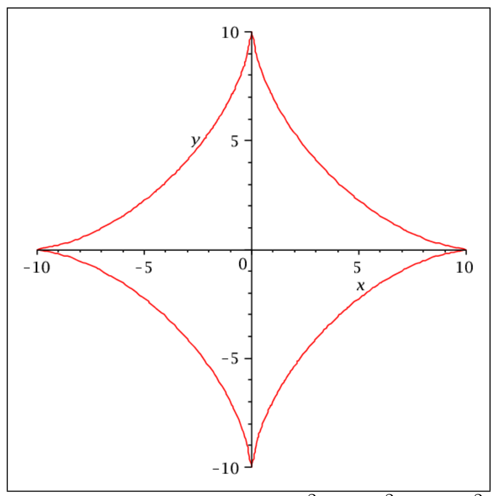
Definice 1.1 (Křivka daná parametricky)
Nechť $X = X(t)$ a $Y = Y(t)$ jsou funkce diferencovatelné na (α, β) a spojité na $[\alpha, \beta]$. Pak množinu bodů

$$\{[X(t), Y(t)] \in \mathbb{R}^2 : t \in [\alpha, \beta]\},$$

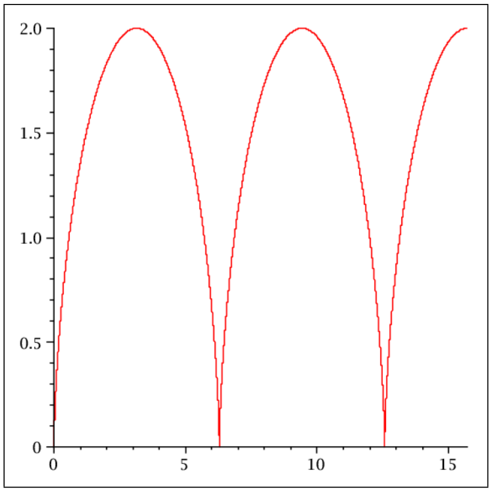
nazvýváme křivkou danou parametricky.



Descartův list $\{[x, y]_k : x^3 + y^3 = axy\}$. Parametrizace $x(t) = a\cos^{\frac{2}{3}} t$ a $y(t) = a\sin^{\frac{2}{3}} t$. Dosadíme: $a^3 = 3a(\cos t \sin t)^{\frac{2}{3}}$.



Asteroida $\{[x, y]_k : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}\}$ Parametrizace $x(t) = a\cos^3 t$ a $y(t) = a\sin^3 t$.



Cykloida $\{[x,y]_k : x(t) = a(t - \sin t), y(t) = a(1 - \cos t), t \geq 0\}$

1.2 Tečny ke křivce dané parametricky

Poznámka. Pro derivaci funkcí podle parametru (typicky t je ve fyzice čase apod.) se často používá značení derivací tečkou: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t) = \dot{X}(t)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y(t) = \dot{Y}(t)$.

Věta 1.2 (Rovnice tečny)
Mějme křivku $\{[X(t), Y(t)] : t \in [\alpha, \beta]\}$ a nechť pro $t_0 \in (\alpha, \beta)$ je alespoň jedna z derivací $\dot{X}(t_0)$ a $\dot{Y}(t_0)$ nenulová. Pak rovnice tečny ke křivce v bodě $[X(t_0), Y(t_0)]$ je

$$\dot{Y}(t_0)(x - X(t_0)) = \dot{X}(t_0)(y - Y(t_0)).$$

Důkaz. 1. Nechť $\dot{X}(t_0) \neq 0$:
Sestrojíme sečnu s procházející bodem $[X(t_0), Y(t_0)]$ a nějakým blízkým bodem $[X(t_0+h), Y(t_0+h)]$ ($h > 0$ malé) a pomocí limitního přechodu $h \to 0$ získáme rovnci tečny $t : y = kx + q$. Směrnice k_s takové sečny má rovnici

$$k_s(h) = \frac{Y(t_0 + h) - Y(t_0)}{X(t_0 + h) - X(t_0)}.$$

Provedeme-li limitní přechod $h \to 0$, dostaneme směrnici tečny k v bodě $[X(t_0), Y(t_0)]$:

$$k = \lim_{h \to 0} k_s(h) = \lim_{h \to 0} \frac{Y(t_0 + h) - Y(t_0)}{X(t_0 + h) - X(t_0)} = \lim_{h \to 0} \frac{Y(t_0 + h) - Y(t_0)}{X(t_0 + h) - X(t_0)} \frac{h}{h} = \frac{\dot{Y}(t_0)}{\dot{X}(t_0)}$$

Koeficient q vypočítáme po dosazení bodu $[x(t_0), y(t_0)]$ do rovnice tečny

$$q = Y(t_0) - kX(t_0) = Y(t_0) - \frac{\dot{Y}(t_0)}{\dot{X}(t_0)} X(t_0).$$

Odtud dostáváme tvrzení věty.

2. Je-li $\dot{X}(t_0) = 0$, pak $X(t) = X(t_0)$ a podle předpokladů je nutně $\dot{Y}(t_0) \neq 0$. Dostáváme tedy vertikální tečnu o rovnici $x = X(t_0)$.

$\square$

1.3 Plocha v křivce dané parametricky

Věta 1.3 (Plocha v křivce)
Nechť $\{[X(t), Y(t)] : t \in [\alpha, \beta]\}$ je křivka daná parametricky a nechť X je prostá, $\dot{X}$ spojitá a $Y \geq 0$ na $[\alpha, \beta]$. Potom plocha vymezená křivkou a osou x je dána vzorcem

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} Y(t)\dot{X}(t)\mathrm{d}t.$$

Důkaz. Protože $X(t)$ je prostá funkce, existuje k ní inverzní funkce X^{-1} a vztah $x = X(t)$ lze invertovat na $t = X^{-1}(x)$. Křivku v parametrickém popisu můžeme zároveň uvažovat jako křivku danou grafem funkce f s předpisem

$$f(x) := Y(t) = Y(X^{-1}(x)).$$

Plocha pod grafem funkce f je

$$A = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x,$$

kde meze a a b jsou dány obrazem bodů α a β:

$$a := X(\alpha), \quad b := X(\beta).$$

Dále zpětně provedeme substituci $x = X(t)$ a dostaneme tvrzení věty:

$$A = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(X(t))\dot{X}(t)\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} Y(X^{-1}(X(t)))\dot{X}(t)\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} Y(t)\dot{X}(t)\mathrm{d}t.$$

$\square$

1.4 Délka křivky dané parametricky

Věta 1.4 (Délka parametrické křivky)
Nechť $\dot{X}$ a $\dot{Y}$ jsou spojité funkce na $[\alpha, \beta]$. Délka křivky dané parametricky je dána vzorcem

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\dot{X}(t))^2 + (\dot{Y}(t))^2} \mathrm{d}t.$$

Věta 1.5 (Délka křivky v polárních souřadnicích)
Nechť r a $\dot{r}$ jsou spojité funkce na $[\alpha, \beta]$. Délka křivky v polárních souřadnicích

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + \dot{r}^2(\varphi)} \mathrm{d}\varphi.$$

Důkaz. Ve Větě 1.4 přejdeme do polárních souřadnic vztahy

$$X(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi,$$
$$Y(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi,$$

pro které platí

$$\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 = r^2 + \dot{r}^2.$$

□

1.5 Objem a povrch rotující křivky dané parametricky

Věta 1.6 (Objem křivky rotující okolo osy x)
Nechť $\{[X(t), Y(t)] : t \in [\alpha, \beta]\}$ je křivka daná parametricky a nechť X je prostá, $\dot{X}$ spojitá a $Y \geq 0$ na $[\alpha, \beta]$. Potom objem tělesa, které vznikne rotací křivky dané parametricky okolo osy x je dán vzorcem

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} Y^2(t) \dot{X}(t) \mathrm{d}t.$$

Věta 1.7 (Objem křivky rotující okolo osy y)
Nechť $\{[X(t), Y(t)] : t \in [\alpha, \beta]\}$ je křivka daná parametricky a nechť Y je

prostá, $\dot{Y}$ spojitá a $X \geq 0$ na $[\alpha, \beta]$. Potom objem tělesa, které vznikne rotací křivky dané parametricky okolo osy y je dán vzorcem

$$V = \pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} X^2(t)\dot{Y}(t)\mathrm{d}t.$$

Věta 1.8 (Povrch křivky rotující okolo osy x)
Nechť $\{[X(t), Y(t)] : t \in [\alpha, \beta]\}$ je křivka daná parametricky a nechť X je prostá, $\dot{X}$ a $\dot{Y}$ spojité a $Y \geq 0$ na $[\alpha, \beta]$. Potom povrch tělesa, které vznikne rotací křivky dané parametricky okolo osy x je dán vzorcem

$$P = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} Y(t)\sqrt{(\dot{X}(t))^2 + (\dot{Y}(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

Věta 1.9 (Povrch křivky rotující okolo osy y)
Nechť $\{[X(t), Y(t)] : t \in [\alpha, \beta]\}$ je křivka daná parametricky a nechť Y je prostá, $\dot{X}$ a $\dot{Y}$ spojité a $X \geq 0$ na $[\alpha, \beta]$. Potom povrch tělesa, které vznikne rotací křivky dané parametricky okolo osy y je dán vzorcem

$$P = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} X(t)\sqrt{(\dot{X}(t))^2 + (\dot{Y}(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$