1 $\boxed{\text{Kuželosečky}}$

1.1 Kartézský systém souřadnic v $\mathbb{R}^2$

Poznámka. Kartézský systém souřadnic (O, x, y). Posunutí (přechod) do systému (O', x', y'), kde $O' = [x_0, y_0]$ transformacemi

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x', \\ y &= y_0 + y'. \end{aligned}$$

Definice 1.1 (Vzdálenost bodů)
Vzdálenost dvou bodů $A = [x_A, y_A]$ a $B = [x_B, y_B]$:

$$\mathrm{d}(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

Definice 1.2 (Vzdálenost bodu a přímky)
Vzdálenost bodu $A = [x_A, y_A]$ a přímky p:

$$\mathrm{d}(p, A) = \min_{B \in p} \mathrm{d}(A, B).$$

Věta 1.3 (Vzdálenost přímky od počátku)
Vzdálenost přímky $p : ax + by + c = 0$ od počátku $O = [0, 0]$ je dána výrazem

$$\mathrm{d}(p, O) = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Důkaz. Vzdálenost počátku O od přímky p se realizuje na kolmici. Sestrojíme proto kolmici q k přímce p, která prochází počátkem a změříme vzdálenost bodu A průniku přímek p a q od O.

Připomeňme, že koeficienty a a b tvoří normálový (kolmý) vektor k přímce p. Proto přímku q hledáme ve tvaru $q : bx - ay + d = 0$ neb vektor $(b, -a)$ je kolmý na (a, b). Nyní stačí určit koeficient d podle podmínky $O \in q$, odkud $d = 0$.

Dalším krokem je nalezení průsečíku $A = [x_A, y_A]$ přímek p a q. Řešením rovnic

$$\begin{aligned} ax_A + by_A + c &= 0 \\ bx_A - ay_A &= 0. \end{aligned}$$

dostaneme souřadnice průsečíku

$$x_A = -\frac{ac}{a^2+b^2}, \quad y_A = -\frac{bc}{a^2+b^2}.$$

Nakonec spočítáme vzdálenost bodu A od počátku O

$$\mathrm{d}(p,O) = \mathrm{d}(O,A) = \frac{\sqrt{a^2c^2+b^2c^2}}{\sqrt{a^2+b^2}^2} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$\square$

Důsledek 1.4 (Vzdálenost přímky od bodu)
Vzdálenost přímky $p: ax+by+c=0$ od bodu $B=[x_B,y_B]$ je dána výrazem

$$\mathrm{d}(p,B) = \frac{|ax_B+by_B+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Důkaz. Použijeme výsledek Věty 1.3, pro který posuneme počátek pomocné soustavy souřadné (O',x',y') do bodu B, tj. počátek O' má v původní souřadné soustavě souřadnice $O'=B=[x_B,y_B]$. Transformační vztahy posunutí $(O,x,y)\to(O',x',y')$ jsou

$$\begin{aligned} x &= x_B + x', \\ y &= y_B + y'. \end{aligned}$$

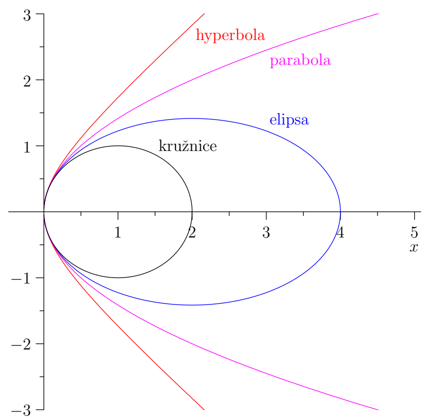
Přímka p má tedy v čárkované soustavě rovnici $p: a(x_B+x')+b(y_B+y')+c=0$, tj.

$$p: ax'+by'+\underbrace{ax_B+by_B+c}_{\text{ozn. } c'}=0.$$

Podle Věty 1.3 je vzdálenost počátku O' od přímky p (vyjádřené v čárkované soustavě)

$$\mathrm{d}(O',p) = \frac{|c'|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax_B+by_B+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$\square$



1.2 Kružnice a elipsa

Definice 1.5 (Kružnice)
Kružnice se středem v bodě S o poloměru $r > 0$

$$\mathcal{K} = \{A : \mathrm{d}(A, S) = r\}\,.$$

Poznámka. Nechť $S = [x_0, y_0]$ a bod $A = [x, y]$. Pak $A \in \mathcal{K}$ když $\mathrm{d}(A, S) = r$, tj.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Definice 1.6 (Elipsa)
Elipsa s ohnisky F_1 a F_2 a délkou hlavní poloosy a

$$\mathcal{E} = \{A : \mathrm{d}(A, F_1) + \mathrm{d}(A, F_2) = 2a\}\,,$$

kde střed S se nachází v polovině úsečky $\overline{F_1F_2}$ a $2a > \mathrm{d}(F_1, F_2) \geq 0$.

Poznámka. Nechť $S = [0, 0]$, $F_1 = [-e, 0]$, $F_2 = [e, 0]$, tj. hlavní poloosa je ve směru osy x. Číslo e nazýváme excentricita (výstřednost). Rovnici všech bodů $A = [x, y] \in \mathcal{E}$ dostaneme z definiční rovnice

$$\mathrm{d}(A, F_1) + \mathrm{d}(A, F_2) = 2a$$

pomocí algebraických manipulací ve tvaru

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

kde mezi koeficienty a, b a e platí z Pythagorovy věty

$$e^2 + b^2 = a^2.$$

Koeficient b se nazývá vedlejší poloosa ($b < a$).Vrcholy elipsy se nacházejí v bodech $V_{1,2} = [x_0 \pm a, y_0]$, $V_{3,4} = [x_0, y_0 \pm b]$.

Analogicky lze odvodit rovnici pro elipsu s hlavní poloosou ve směru osy y.

Věta 1.7 (Rovnice elipsy)
Rovnice elipsy se středem v bodě $S = [x_0, y_0]$, excentricitou e a hlavní poloosou a ve směru osy x

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Rovnice elipsy se středem v bodě $S = [x_0, y_0]$, excentricitou e a hlavní poloosou a ve směru osy y

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1.$$

Pro parametry a, b a e platí $e^2 + b^2 = a^2$.

Důkaz. Plyne z definice a předchozí poznámky. Vrcholy $V_{1,2} = [x_0 \pm a, y_0]$, $V_{3,4} = [x_0, y_0 \pm b]$. V prvním případě, $F_{1,2} = [x_0 \pm e, y_0]$. V druhém pak $F_{1,2} = [x_0, y_0 \pm e]$. □

1.3 Hyperbola

Definice 1.8 (Hyperbola)
Hyperbola s ohnisky F_1 a F_2 a délkou reálné poloosy $a > 0$

$$\mathcal{H} = \left\{ A : \Big| \mathrm{d}(A, F_1) - \mathrm{d}(A, F_2) \Big| = 2a \right\},$$

kde střed S se nachází v polovině úsečky $\overline{F_1F_2}$ a $2a < \mathrm{d}(F_1, F_2)$.

Poznámka. Nechť $S = [0, 0]$, $F_1 = [-e, 0]$, $F_2 = [e, 0]$ (e–excentricita), tj. reálná poloosa a je ve směru osy x. Rovnici všech bodů $A = [x, y] \in \mathcal{H}$ odvodíme z definiční rovnice

$$\Big| \mathrm{d}(A, F_1) - \mathrm{d}(A, F_2) \Big| = 2a,$$

kterou je též možné zapsat ve tvaru

$$\mathrm{d}(A, F_1) - \mathrm{d}(A, F_2) = \pm 2a,$$

který vyjadřuje obě větve hyperboly (pro $x > 0$ i $x < 0$). Po dosazení za definici vzdálenosti bodů jednu z odmocnin převedeme na druhou stranu rovnice

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \pm 2a$$

a umocníme na druhou

$$(x+e)^2 + y^2 = (x-e)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + 4a^2.$$

Tuto rovnici upravíme a umocníme na druhou

$$x^2(e^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(e^2 - a^2).$$

Dle předpokladu je $0 < 2a < \mathrm{d}(F_1, F_2) = 2e$, proto $a < e$ a můžeme zavést parametr $b^2 = e^2 - a^2$, který nazveme imaginární poloosou. Celkem rovnici hyperboly zapisujeme ve tvaru

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Vrcholy hyperboly se nacházejí v bodech $V_{1,2} = [\pm a, 0]$.

Analogicky lze odvodit rovnici pro hyperbolu s reálnou poloosou ve směru osy y.

Věta 1.9 (Rovnice hyperboly)
Rovnice hyperboly se středem v bodě $S = [x_0, y_0]$, excentricitou e a reálnou poloosou a ve směru osy x

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Rovnice hyperboly se středem v bodě $S = [x_0, y_0]$, excentricitou e a reálnou poloosou a ve směru osy y

$$-\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1.$$

Pro parametry a, b a e platí $e^2 = a^2 + b^2$.

Důkaz. Plyne z definice a předchozí poznámky. V prvním případě, $F_{1,2} = [x_0 \pm e, y_0]$ a $V_{1,2} = [x_0 \pm a, y_0]$. V druhém pak $F_{1,2} = [x_0, y_0 \pm e]$ a $V_{1,2} = [x_0, y_0 \pm a]$. □

Věta 1.10 (Asymptoty hyperboly)
Hyperbola o rovnici

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

má v $\pm\infty$ asymptoty

$$y = y_0 \pm \frac{b}{a}(x - x_0).$$

Důkaz. Z rovnice hyperboly umíme vyjádřit dva funkční předpisy

$$f_{1,2}(x) = y_0 \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(x-x_0)^2 - b^2},$$

které popisují horní ($y > y_0$) a spodní ($y < y_0$) část grafu hyperboly. Snadno nahlédneme, že

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(x-x_0)^2 - b^2} - \frac{b}{a}(x - x_0) = 0.$$

□

1.4 Parabola

Definice 1.11 (Parabola)
Parabola s ohniskem F a řídící přímkou p

$$\mathcal{P} = \{A : \mathrm{d}(A, F) = \mathrm{d}(A, p)\}.$$

Vrchol paraboly V se nachází v polovině vzdálenosti $\mathrm{d}(F, p)$ od ohniska F na normále k řídící přímce procházející ohniskem F.

Poznámka. Nechť $V = [0, 0]$, $F = [0, e]$, $p : y = -e$ a $e > 0$, tj. parabola je otevřena v kladném směru osy y. Rovnici všech bodů $A = [x, y] \in \mathcal{P}$ dostaneme z definiční rovnice

$$\mathrm{d}(A, F) = \mathrm{d}(A, p),$$

tj.

$$\sqrt{x^2 + (y - e)^2} = \sqrt{(y + e)^2},$$

odkud pomocí algebraických manipulací dostaneme rovnici paraboly ve tvaru

$$x^2 = 4ey.$$

Analogicky lze odvodit rovnici pro parabolu otevřenou v kladném směru osy x: $y^2 = 4ex$. Pokud $e < 0$, je parabola otevřena v záporném směru os.

Věta 1.12 (Rovnice paraboly)
Parabola s vrcholem v bodě $V = [x_0, y_0]$ a excentricitou e položená v kladném ($e > 0$) nebo záporném ($e < 0$) směru osy x má rovnici

$$(y - y_0)^2 = 4e(x - x_0).$$

Parabola s vrcholem v bodě $V = [x_0, y_0]$ a excentricitou e položená v kladném ($e > 0$) nebo záporném ($e < 0$) směru osy y má rovnici

$$(x - x_0)^2 = 4e(y - y_0).$$