1 Integrace racionálních funkcí

Definice 1.1 (Racionální funkce)
Racionální funkcí nazýváme funkci $f = \frac{p}{q}$, kde p a q jsou polynomy.

Poznámka. Chceme spočítat $\int \frac{p(x)}{q(x)} \mathrm{d}x$ umíme-li spočítat $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^k}$, $\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^k} \mathrm{d}x$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+bx+c)^k}$.

Věta 1.2 (Rovnost polynomů)
Dva polynomy $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ a $q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ se na $\mathbb{C}$ (tj. i na $\mathbb{R}$) rovnají právě tehdy, když mají stejný stupeň ($n = m$) a $a_k = b_k$ pro všechna $k = 0, 1, \ldots, n$.

Definice 1.3 (Ireducibilní polynom nad $\mathbb{R}$)
Polynom p nazýváme ireducibilním nad $\mathbb{R}$, pokud nemá žádný reálný kořen.

Poznámka. Polynom $(ax^2 + bx + c)^k$ je ireducibilní nad $\mathbb{R}$, právě když $b^2 - 4ac < 0$.

Postup 1.4 (Postup integrace racionální funkce pomocí rozkladu na parciální zlomky)
Postup integrace racionální funkce $\int \frac{p(x)}{q(x)} \mathrm{d}x$, kde $\operatorname{st} p < \operatorname{st} q$.

1. Faktorizace polynomu q na ireducibilní polynomy nad $\mathbb{R}$:

$$q(x) = a_n \prod_{i=1}^{k} (x - a_i)^{n_i} \prod_{i=1}^{\ell} (x^2 + b_i x + c_i)^{m_i}$$

2. Rozložení $\frac{p(x)}{q(x)}$ na parciální zlomky podle následujících pravidel:

   (a) Faktor typu $(x - a)^n$ ve jmenovateli vede na parciální zlomky

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}.$$

   (b) Faktor typu $(x^2+bx+c)^m$ ve jmenovateli vede na parciální zlomky

$$\frac{B_1 x + C_1}{x^2 + bx + c} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{B_m x + C_m}{(x^2 + bx + c)^m}.$$

3. Neznámé koeficienty (viz A_i, B_i a C_i) v čitatelích všech parciálních zlomků je nutné spočítat pomocí zpětného sloučení parciálních zlomků na společný jmenovatel.

4. Porovnáním výsledného polynomu v čitateli pomocí věty 1.2 s původním polynomem $p(x)$ podle koeficientů u jednotlivých mocnin x^k dostaneme soustavu lineárních rovnic.

5. Řešením soustavy lineárních rovnic dostaneme rozklad racionální funkce na parciální zlomky.

6. Postupná integrace jednotlivých parciálních zlomků.