

1 Aplikace integrálů

Rozcvička

V této krátké části jsou příklady, které pro svou vyšší náročnost nebudou ve zkouškové písemce, a tudíž nejsou číslovány.

- Spočtěte povrch toru (duše) $x^2 + (y - b)^2 = a^2; b \geq a$ [4 $\pi^2 ab$]

Zkouškové příklady

1.1 Výpočet plochy

1. Nechť je dána funkce $f(x) = \sin(x) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ na intervalu $[-\pi, \pi]$. Jaká je plocha pod touto funkcí na intervalu $[0, \pi]$? [$\frac{4}{3}$]
2. Spočtěte plochu mezi osou x a grafem funkce $f(x) = 2 + x^3; x \in [0, 1]$. [$\frac{9}{4}$]
3. Spočtěte plochu mezi osou x a grafem funkce $f(x) = (2x^2 + 1)^2; x \in [0, 1]$. [$\frac{47}{15}$]
4. Spočtěte plochu mezi osou x a grafem funkce $f(x) = \sin x; x \in \left[\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi\right]$. [$\frac{1}{2}$]
5. Spočtěte plochu mezi osou x a grafem funkce $f(x) = x\sqrt{2x^2 + 1}; x \in [0, 2]$. [$\frac{13}{3}$]
6. Spočtěte plochu mezi osou x a grafem funkce $f(x) = x^{-3}(1 + x^{-2})^{-3}; x \in [1, 2]$. [$\frac{39}{400}$]
7. Spočtěte plochu sevřenou mezi grafy $y = \sqrt{x}$ a $y = x^2$. [$\frac{1}{3}$]
8. Spočtěte plochu sevřenou mezi grafy $y = x^2$ a $y = 4x - 3$. [$\frac{4}{3}$]
9. Spočtěte plochu sevřenou mezi grafy $y = x$ a $x^3 - 10y^2 = 0$. [10]
10. Spočtěte plochu sevřenou mezi grafy $y = x$, $y = 2x$ a $y = 4$. [4]
11. Spočtěte plochu sevřenou mezi grafy $y = \cos x$ a $y = 4x^2 - \pi^2$. [$2 + \frac{2}{3}\pi^3$]
12. Spočtěte plochu sevřenou mezi grafy $y = \cos^2(\pi x)$ a $y = \sin^2(\pi x)$ pro $x \in [0, \frac{1}{4}]$. [$\frac{1}{2\pi}$]
13. Spočtěte plochu sevřenou mezi grafy $y = 2^x$, $y = 2$ a $x = 0$. [$2 - \frac{1}{\ln 2}$]
14. Spočtěte plochu sevřenou mezi grafy $y = (x + 1)^2$ a $x = \sin(\pi y)$ pro $y \in [0, 1]$. [$\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi}$]
15. Spočtěte plochu sevřenou mezi grafy $y = x$ a $y = x + \sin^2 x$ pro $x \in [0, \pi]$. [$\frac{\pi}{2}$]

1.2 Výpočet těžiště

16. Určete souřadnice těžiště oblasti vymezené grafy $y = \sqrt{x^2(1 - x^2)}$ a $y = 0$.
[$\bar{x} = \frac{3}{16}\pi, \bar{y} = \frac{1}{5}$]
17. Určete souřadnice těžiště oblasti vymezené grafy $y = \frac{4}{x^2}$ a $y = 0$ pro $x \in [1, 3]$.
[$\bar{x} = \frac{3}{2} \ln 3, \bar{y} = \frac{26}{27}$]
18. Určete souřadnice těžiště oblasti vymezené grafy $y = 1 + x^4$ a $y = 0$ pro $x \in [0, 1]$.
[$\bar{x} = \frac{5}{9}, \bar{y} = \frac{17}{27}$]

19. Určete souřadnice těžiště oblasti vymezené grafy $y = \sqrt{1 - x^2}$ a $y = 0$ pro $x \in [-1, 0]$.

$$[\bar{x} = -\frac{4}{3\pi}, \bar{y} = \frac{4}{3\pi}]$$

1.3 Výpočet délky grafu funkce

20. Jaká je délka grafu funkce $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$? $[\frac{\pi}{2}]$

21. Pomocí funkce $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ a integrálního počtu spočítejte obvod kruhu o poloměru R .

22. Spočtěte délku křivky $f(x) = x\sqrt{x}$, $x \in [0, 4]$. $[\frac{80}{27}\sqrt{10} - \frac{8}{27}]$

23. Spočtěte délku grafu $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, kde $x \in [0, b]$. $[a \sinh \frac{b}{a}]$

24. Spočtěte délku grafu $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, kde $y \in [1, e]$. $[\frac{e^2+1}{4}]$

25. Spočtěte délku grafu $y = a \ln \frac{a^2}{a^2 - x^2}$, kde $x \in [0, b]$ a $b < a$. $[a \ln \frac{a+b}{a-b} - b]$

26. Spočtěte délku grafu $y = \ln \cos x$, kde $x \in [0, a]$ a $a < \frac{\pi}{2}$. $[\ln |\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2})|]$

27. Spočtěte délku grafu $y = 2a \ln \frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} - 4\sqrt{ax}$, kde $x \in [0, b]$ a $b > 0$. $[2a \ln \frac{a}{a-b} - b]$

28. Spočtěte délku grafu $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$, kde $y \in [b, a]$ a $0 < b < a$. $[a \ln \frac{a}{b}]$

1.4 Výpočet objemu rotačního tělesa

29. Spočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací oblasti ohraničené $y = 2x - x^2$ a $y = 0$ kolem osy x . $[\frac{16}{15}\pi]$

30. Spočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy sevřené grafy $y = x^2$ a $y = 9$ okolo osy x . $[\frac{1944}{5}\pi]$

31. Spočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy sevřené grafy $y = x^3$, $xy = 10$ a $y = 1$ okolo osy x . $[(\frac{80}{7}10^{\frac{3}{4}} - \frac{134}{7})\pi]$

32. Spočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy sevřené grafy $y = \sqrt{4 - x^2}$ a $y = 0$ okolo osy x . $[\frac{32}{3}\pi]$

33. Spočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy sevřené grafy $y = x$ a $y = 2x - x^3$ okolo osy x . $[\frac{12}{35}\pi]$

34. Spočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy sevřené grafy $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = 0$ a $x \in [-1, 1]$ okolo osy x . $[\frac{\pi}{4}(\pi + 2)]$

35. Spočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy sevřené grafy $y = \cos x$, $y = 2 \cos x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ okolo osy x . $[\frac{3}{2}\pi^2]$

36. Spočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy sevřené grafy $y = e^x - 1$, $y = 2$ a $x = 0$ okolo osy x . $[\pi \ln 3]$

37. Spočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy sevřené grafy $x = y^3$, $x = 8$, $y = 0$ okolo osy y . $[\frac{768}{7}\pi]$

38. Spočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy sevřené grafy $y = \sqrt{x}$ a $y = x^3$ okolo osy y . $[\frac{2}{5}\pi]$
39. Spočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy sevřené grafy $x = y^2$ a $x = 2 - y^2$ okolo osy y . $[\frac{10}{3}\pi]$
40. Spočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy sevřené grafy $y^3 - y = x$ a $x = 0$ okolo osy y . $[\frac{16}{105}\pi]$
41. Spočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy sevřené grafy $y = \cos x$, $y = 2 \cos x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ okolo osy x . $[\frac{3}{2}\pi^2]$
42. Spočtěte objem tělesa, které vznikne rotací plochy sevřené grafy $y = \cos x$, $y = 2 \cos x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ okolo osy y . $[\pi^2 - 2\pi]$

1.5 Výpočet povrchu rotačního tělesa

43. Pomocí funkce $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ a integrálního počtu spočítejte objem a povrch koule o poloměru R . $[V = \frac{4}{3}\pi R^3, P = 4\pi R^2.]$
44. Pomocí integrálního počtu a vhodně zvolené funkce spočítejte objem a povrch pláště kužele o výšce a a poloměru podstavy r . $[V = \frac{\pi r^2 v}{3}, P = \pi r v \sqrt{v^2 + r^2}]$
45. Spočtěte povrch rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu $y = \sin x$ a $x \in [0, \pi]$ okolo osy x. $[2\pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))]$
46. Spočtěte povrch rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu $y = \frac{1}{x}$, $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ okolo osy x. $[\frac{3}{8}\sqrt{17} + \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{4+\sqrt{17}}{1+\sqrt{17}}]$
47. Spočtěte povrch rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu $y = e^x$ a $x \in [-\ln 2, \ln 2]$ okolo osy x. $[\pi(\frac{7}{4}\sqrt{5} + \ln \frac{4+2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}})]$
48. Spočtěte povrch rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu $y^2 + 4x = 2 \ln y$, $y \in [1, 2]$ okolo osy y. $[\frac{\pi}{16}(4 \ln^2 2 + 16 \ln 2 - 27)]$
49. Spočtěte povrch rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu $y = a \cos \frac{\pi x}{2b}$, $x \in [-b, b]$ okolo osy x. $[2a\sqrt{\pi^2 a^2 + 4b^2} + \frac{8}{\pi} b^2 \ln \frac{\pi a + \sqrt{\pi^2 a^2 + 4b^2}}{2b}]$
50. Spočtěte povrch rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu $y^2 = 2px$, $x \in [0, b]$ okolo osy x. $[\frac{2}{3}\pi((2b+p)\sqrt{2bp+p^2} - p^2)]$
51. Spočtěte povrch rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu $y^2 = 2px$, $x \in [0, b]$ okolo osy y. $[\frac{\pi}{4}((p+4b)\sqrt{2b(p+2b)} - p^2 \ln \frac{\sqrt{2b} + \sqrt{p+2b}}{\sqrt{p}})]$
52. Spočtěte povrch rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu $y = \cosh x$, $x \in [0, \ln 2]$ okolo osy x.