1 Extremální úlohy, konvexnost, konkávnost, inflexe

Rozcvička

V této části jsou příklady na procvičení hledání lokálních extrémů, které pro svou nižší náročnost nejsou zahrnuty ve zkouškové písemce, a tudíž nejsou číslovány.

- Úsečku rozdělte na dvě části tak, aby součet obsahů čtverců sestrojených nad oběma částmi byl minimální.

[v polovině]

- Ze všech obdélníků s daným obsahem určete ten, který má nejmenší obvod.

[$a = b = \sqrt{S}$, kde S je obsah]

- Jak volit rozměry pozemku pravoúhlého tvaru, máme-li jej oplotit pletivem délky 60m a chceme aby obsah byl co největší?

[$15 \times 15 = 225$]

Zkouškové příklady

1.1 Konvexnost, konkávnost a inflexe

1. Vyšetřete konvexnost, konkávnost a inflexní body funkce $f(x) = \dfrac{|x^2 - 3x - 4|}{x}$

[konvexní na $(-\infty, -1)$ a $(0, 4)$, konkávní na $(-1, 0)$ a $(4, +\infty)$, inflex $x = -1, x = 4$]

2. Vyšetřete konvexnost, konkávnost a inflexní body funkce $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$

[TODO]

3. Vyšetřete konvexnost, konkávnost a inflexní body funkce $f(x) = 3x^2 - x^3$

[TODO]

4. Vyšetřete konvexnost, konkávnost a inflexní body funkce $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$

[TODO]

5. Vyšetřete konvexnost, konkávnost a inflexní body funkce $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

[konvexní na $\mathbb{R}$]

6. Vyšetřete konvexnost, konkávnost a inflexní body funkce $f(x) = \dfrac{|x - 1|}{x^2}$

[TODO]

7. Vyšetřete konvexnost, konkávnost a inflexní body funkce $f(x) = \ln(1 + x^2)$

[konvexní na $(-1, 1)$, konkávní na $(-\infty, -1)$ a $(1, +\infty)$, inflex $x = -1, x = 1$]

8. Vyšetřete konvexnost, konkávnost a inflexní body funkce $f(x) = x^3 \ln x + 1$

[TODO]

1.2 Extremální úlohy

9. Z desky tvaru trojúhelníku, jehož základna je a a výška v a úhly při základně jsou ostré, má být vyříznuta obdélníková deska; přičemž jedna strana obdélníku je částí základny. Pomocí techniky hledání extrémů určete rozměry obdélníku tak, aby jeho obsah byl maximální.

[$x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{v}{2}$]

10. Určete rozměry parního kotle tvaru válce tak, aby při daném objemu V bylo ochlazování páry nejmenší - tj. aby povrch válce (včetně podstav) byl minimální.

[$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, v = \frac{V}{\pi r^2}$]

11. Ze všech pravoúhlých trojúhelníků s daným součtem délek přepony a odvěsny k určete ten jehož obsah je největší.

[$y = k/3$, $x = \sqrt{3}/3k$, $\alpha = \pi/6$]

12. Chceme oplotit výběh pro slépky, který má mít tvar pravoúhelníku. Přitom máme k dispozici 200m pletiva a víme, že část plotu budou tvořit 2 celé stěny drůbežárny, jejíž obdélníkový půdorys má rozměry $a = 16m$ a $b = 10m$. Jaké rozměry musí mít výběh, aby měl co největší obsah?

[čtverec $56, 5m$]

13. Pomocí techniky hledáni extrémů určete rozměry obsahově maximálního obdélníka vepsaného elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

[$a\sqrt{2}, b\sqrt{2}$]

14. Pomocí techniky hledání extrémů určete rozměry objemově maximálního válce vepsaného do koule o poloměru R.

[$v = 2R/\sqrt{3}$, $r = R\sqrt{2/3}$]

15. Jaké rozměry musí mít bazén se čtvercovým dnem a objemem $V = 32m^3$, má-li se na jeho vyzdění spotřebovat co nejméně matriálu?

[$4, 4, 2$]

16. Pomocí techniky hledání extrémů vepište do půlkruhu o poloměru r obdélník maximální plochy.

[$r\sqrt{2}, \frac{r}{\sqrt{2}}$]

17. Dolní část okna má tvar obdélníka, horní tvar půlkruhu. Délka rámu celého okna je P. Při jakých rozměrech bude okno propouštět nejvíce světla?

[$\frac{2P}{\pi+4}, \frac{P}{4+\pi}$]

18. Nechť je dána funkce $f(x) = \sin(x)\sqrt{1 - \cos^2(x)}$ na intervalu $[-\pi, \pi]$.

    (a) Rozhodněte, zda existuje první derivace funkce f v bodě $x = 0$.

    (b) Nalezněte všechny lokální extrémy a intervaly monotonie funkce $f(x)$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Jsou tyto lokální extrémy též globálními extrémy na uvažovaném intervalu $[-\pi, \pi]$?

[TODO]

19. Nechť je dána funkce $f(x) = x + 2\sqrt{1 - \cos^2(x)}$.

    (a) Rozhodněte, zda existuje první derivace funkce f v bodě $x = 0$.

    (b) Nalezněte všechny lokální extrémy a intervaly monotonie funkce $f(x)$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Jsou tyto lokální extrémy též globálními extrémy na uvažovaném intervalu $[-\pi, \pi]$?

[(a) neex.; (b) $-\pi \nearrow -\frac{\pi}{3} \searrow 0 \nearrow \frac{2\pi}{3} \searrow \pi$, glob. max v $\frac{2\pi}{3}$]

20. Nalezněte definiční obor, lokální extrémy a intervaly monotonie funkce $f(x) = \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^{\frac{1}{4}}$

[$D_f = (-1, +\infty), -1 \searrow 0 \nearrow +\infty$]

21. Nechť součet dvou čísel je 12, určete tato čísla tak, aby

    (a) součet třetích mocnin byl minimální

    (b) součin jednoho s třetí mocninou druhého byl maximální

    (c) obě byla kladná a součin jednoho s druhou mocninou druhého byl maximální.

[TODO]

22. Ukažte, že pro všechna $x > 0$ je funkce $\ln x$ vždy menší než $\sqrt{x}$. (Návod: zkoumejte extrémy rozdílu těchto funkcí.)

[maximum $\ln x - \sqrt{x}$ je $2 \ln 2 - 2 < 0$]

23. Ukažte, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je funkce $1 + x$ vždy menší než e^x. (Návod: zkoumejte extrémy rozdílu těchto funkcí.)

[minimum $e^x - x - 1$ je 0 v $x = 0$]

24. Ukažte, že pro všechna $x > 0$ je funkce $\ln(1 + x)$ vždy menší než x. (Návod: zkoumejte extrémy rozdílu těchto funkcí.)

[$\ln(1 + x) - x$ je pro $x > 0$ ostře klesající a záporná]

25. Ukažte, že pro všechna $x > 0$ je funkce arctg x vždy menší než x. (Návod: zkoumejte extrémy rozdílu těchto funkcí.)

[arctg $x - x$ je pro $x > 0$ ostře klesající a záporná]

26. Určete kladný parametr $A > 0$ tak, aby objem tělesa, které vznikne rotací funkce $f(x) = Ax + \frac{1}{A(x+1)}$ okolo osy x na intervalu $[0, 1]$ byl minimální !

[$A = \sqrt[4]{3/2}$]

27. Je-li rozdíl dvou čísel rovný 10, je jejich součin větší než -30?

[ano]

28. Nit délky l se má rozstřihnout na dvě části, z jedné části se udělá kružnice a ze druhé čtverec. Určete délky jednotlivých částí tak, aby součet ploch čtverce a kruhu byl minimální.

[$l_1 = \frac{l\pi}{4+\pi}$, $l_2 = \frac{4l}{4+\pi}$]

29. Nit délky l se má rozstřihnout na dvě části. Z jedné části se udělá kružnice a ze druhé rovnostranný trojúhelník. Určete délky jednotlivých částí tak, aby součet ploch trojúhelníku a kruhu byl minimální.

[TODO]

30. Do koule o poloměru R vepište válec s maximálním objemem.

$[r = R\sqrt{\frac{2}{3}},\ v = \frac{2R}{\sqrt{3}}]$

31. Do koule o poloměru R vepište válec s maximálním povrchem.

$[r = R\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}},\ v = R\sqrt{2 - \frac{2\sqrt{5}}{2}}]$

32. Jaký je maximální objem kužele s danou stranou s?

$[\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}s^3]$

33. Při jakých rozměrech má válec daného objemu V nejmenší povrch?

$[v = 2\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}},\ r = \frac{v}{2}]$

34. Z papíru tvaru obdélníka se stranami a a b vyrobíme krabičku tak, že vystřihneme ze všech čtyř rohů stejné čtverce. Krabička bude mít výšku rovnou straně tohoto čtverce. Pomocí techniky hledání extrémů nalezněte délku strany čtverce, při níž bude objem krabičky největší.

$[\frac{1}{6}\left(a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}\right)]$