1 Průběh funkce, tečny, normály, asymptoty, monotonie, inverze, extrémy

Rozcvička

V této části jsou příklady na procvičení vyšetřování průběhu funkce (D_f, limity, horizontální či vertikální tečny, asymptoty, lokální extrémy, náčrtek grafu funkce), které nejsou zahrnuty ve zkouškové písemce, a tudíž nejsou číslovány.

- $f(x) = 2 + x - x^2$
- $f(x) = 3x - x^3$
- $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$
- $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$
- $f(x) = (x-1)^2(2x+4)$
- $f(x) = 2x^2 - \ln x$
- $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$
- $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$
- $f(x) = x + \cos 2x$
- $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$
- $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = x + \arctan x$
- $f(x) = (x+1)^3 \sqrt[3]{x^2}$
- $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

  [$\searrow$ -1 $\nearrow$ 1 $\searrow$]
- $f(x) = \dfrac{x}{3 - x^2}$
- $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$
- $f(x) = x^2 - \ln x^2$
- $f(x) = \cos \dfrac{\pi}{x}$
- $f(x) = x + \sin x$

Zkouškové příklady

1.1 Aplikace derivace

1. Ukažte, že funkce $f(x) = 2\text{arctg}\,\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x$ nezávisí na x. $[f' = 0]$

2. Ukažte, že funkce $f(x) = \text{arctg}\,\dfrac{1+x}{1-x} - \text{arctg}\,x$ nezávisí na x. $[f' = 0]$

3. Ukažte, že funkce $f(x) = \arcsin x + 3\arccos x + \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ nezávisí na x při $x^2 < \frac{1}{2}$. $[f' = 0]$

4. Ukažte, že funkce $f(x) = \text{arctg}\,x - \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ nezávisí na x. $[f' = 0]$

5. Ukažte, že funkce $f(x) = \text{arccotg}\,x - \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ nezávisí na x při $x \geq 0$. $[f' = 0]$

6. **1.2 Tečny a normály**

7. Určete čísla a a b tak, aby přímka $y = 3x + b$ byla tečnou funkce $f(x) = \ln(x^3 + a)$ v bodě $x = 1$.

   [a=0, b=-3]

8. Nechť je dána funkce $f(x) = \sin(x)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ na intervalu $[-\pi, \pi]$. Nalezněte rovnici tečny v bodě $x = \frac{\pi}{2}$.

   $[y = -\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \frac{\pi}{4})]$

9. Nechť je dána funkce $f(x) = x(e^{-x} + 5)$. Nalezněte rovnici tečny v bodě $x = 0$.

   $[y = 6x]$

10. Nechť je dána funkce $f(x) = \ln\left[\left(\dfrac{3x-1}{x+1}\right)^x\right]$. Nalezněte rovnici tečny v bodě $x = 1$.

    $[y = x - 1]$

11. Nalezněte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = x^2 - 5 * x + 4$ v bodě -1.

    [tečna: $y = -7x + 3$, normála: $y = \frac{1}{7}x + \frac{71}{7}$]

12. Nalezněte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = x^2 - 5 * x + 4$ v bodě 3.

    [tečna: $y = x - 5$, normála: $y = -x + 1$]

13. Nalezněte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ v bodě -2.

    [tečna: $y = 5$, normála: $x = -2$]

14. Nalezněte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ v bodě 1.

    [tečna: $y = 3x - 7$, normála: $x = -\frac{1}{3}x - \frac{11}{3}$]

15. Nalezněte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = \sqrt{x}$ v bodě $x = 0$.

    [tečna: $x = 0$, normála: $y = 0$]

16. Nalezněte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = \ln x$ v bodě 1.

[tečna: $y = x - 1$, normála: $y = 1 - x$]

17. Ve kterých bodech je tečna ke grafu funkce $f(x) = 2 + x - x^2$ rovnoběžná s osou x a s přímkou $y = x$?

[s osou x: $\frac{1}{2}$, s přímkou $y = x$: 0]

18. Pod jakým úhlem protíná graf funkce $y = \ln x$ osu x?

[úhel $\operatorname{tg} \alpha = 1$, tj. $\frac{\pi}{4}$]

19. Pod jakým úhlem (vzhledem k ose x) protíná graf funkce $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ přímku $x = 2$?

[arctg $\frac{\mathrm{e}}{2}$]

20. Nalezněte rovnici normály ke křivce $y = -\sqrt{x} + 2$ v jejím průsečíku s přímkou $y = x$.

[$y = 2x - 1$]

21. Určete rovnice tečen ke křivce $y = x^3 + x^2 - 2x$ v průsečících křivky s osou x.

[$6x - y + 12 = 0; 2x + y = 0; 3x - y - 3 = 0$]

22. Ve kterém bodě má graf funkce $y = \sin^2 x$ tečnu svírající s osou x úhel $\frac{\pi}{4}$?

[$(\pi/4 + k\pi, 1/2); k \in \mathbb{Z}$]

23. Ve kterém bodě má graf funkce $y = xe^{-x}$ tečnu rovnoběžnou s osou x?

[$(1, \mathrm{e}^{-1})$]

1.3 Asymptoty

24. Nalezněte všechny asymptoty funkce $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ (včetně vertikálních asymptot).

[y=1 v $\pm\infty$, x=1]

25. Nechť je dána funkce $f(x) = x(e^{-x} + 5)$. Určete definiční obor D_f a rozhodněte o existenci asymptot v $+\infty$ a v $-\infty$ a v kladném případě napište jejich rovnice.

[$D_f = \mathbb{R}$. Pouze v $+\infty$: $y = 5x$]

26. Nechť je dána funkce $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$. Určete definiční obor D_f a nalezněte rovnice asymptot v $+\infty$ a v $-\infty$.

[$D_f = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$, $y = 1x - \frac{1}{2}$, $y = -1x + \frac{1}{2}$]

27. Nechť je dána funkce $f(x) = \ln \left[\left(\dfrac{3x-1}{x+1} \right)^x \right]$. Určete definiční obor D_f a rozhodněte o existenci asymptot a v kladném případě napište jejich rovnice.

[$D_f = (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$. V $\pm\infty$: $y = x \ln 3 - 4/3$]

28. Ve kterém bodě má parabola $y = 2x^2 + 3x - 1$ tečnu

- se směrovým úhlem $\frac{\pi}{4}$?
- rovnoběžnou s přímkou $5x - y + 3 = 0$
- kolmou na přímku $x - 3y + 2 = 0$

[$(-1/2,-2)$, $(1/2,1)$, $(-3/2,-1)$]

29. Určete rovnice tečen ke křivce $y = x^3 + x^2 - 6x$ v průsečících s osou x.

[$15x - y + 45 = 0$, $6x + y = 0$, $10x - y - 20 = 0$]

30. Je dána parabola $y = x^2 - 4x + 3$
    - určete dotykový bod a rovnici tečny paraboly, která má směrový úhel $\frac{\pi}{4}$
    - pomocí derivace určete vrchol paraboly

[$(5/2,-3/4)$, $x - y - 13/4 = 0$, $(2,-1)$]

31. Je dána parabola $y = 1/2x^2 + 3x + 1$
    - určete rovnici tečny paraboly v bodě -2
    - ve kterém bodě má parabola tečnu se směrovým úhlem $\frac{\pi}{3}$?
    - ve kterém bodě má parabola tečnu rovnoběžnou s přímkou $5x - y - 2 = 0$?

[$x - y - 1 = 0$, $(\sqrt{3} - 3, -2)$, $(2,9)$]

1.4 Monotonie, inverze, lokální extrémy

32. Nalezněte D_f, intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = \arcsin\left(\sqrt{1 - x^2}\right)$

[$D_f = [-1,1]$, -1 $\nearrow$ 0 $\searrow$ 1]

33. Nalezněte D_f a intervaly monotonie funkce $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

[$D_f = (0,1) \cup (1,+\infty)$, 0 $\searrow$ 1 $\searrow$ e $\nearrow$]

34. Nalezněte D_f a intervaly monotonie funkce $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 2}{x - 1}$

[$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, ostře roste na D_f]

35. Nalezněte D_f, intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$

[$D_f = [0,4]$, 0 $\nearrow$ 2 $\searrow$ 4]

36. Nalezněte D_f a intervaly monotonie funkce $f(x) = \dfrac{8}{x\sqrt{4 - x^2}}$

[$D_f = (-2,0) \cup (0,2)$, -2 $\nearrow$ $-\sqrt{2}$ $\searrow$ 0 $\searrow$ $\sqrt{2}$ $\nearrow$ 2]

37. Nalezněte D_f a intervaly monotonie funkce $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

[$D_f = (0,+\infty)$, 0 $\nearrow$ e^2 $\searrow$ $+\infty$]

38. Nalezněte intervaly monotonie funkce $f(x) = e^{\sin x}$

[roste na $(-\frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{\pi}{2} + k2\pi)$, klesá na $(\frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{3}{2}\pi + k2\pi)$]

39. Nalezněte intervaly monotonie funkce $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$

[$-\infty$ $\nearrow$ 0 $\searrow$ $+\infty$]

40. Nalezněte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$

[$-\infty$ $\nearrow$ -1 $\searrow$ 1 $\nearrow$ $+\infty$]

41. Nalezněte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = (x-2)^2|x-5|$

[$-\infty \searrow 2 \nearrow 4 \searrow 5 \nearrow +\infty$]

42. Nalezněte D_f, intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = \ln \dfrac{e^x}{1-x^2}$

[$D_f = (-1,1)$, -1 $\searrow 1-\sqrt{2} \nearrow 1$]

43. Nalezněte D_f, intervaly monotonie funkce $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$

[$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $-\infty \nearrow$ -1 $\searrow 0 \nearrow +\infty$]

44. Nalezněte D_f, intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2x+9}$

[$D_f = \mathbb{R}$, $-\infty \searrow$ -3 $\nearrow 3 \searrow +\infty$]

45. Nalezněte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = \cosh^3 x + 1$

[$-\infty \searrow 0 \nearrow +\infty$]

46. Nalezněte D_f, intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = x + \dfrac{2x}{x^2-1}$

[$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, $-\infty \nearrow -\sqrt{2+\sqrt{5}} \searrow$ -1 $\searrow 1 \searrow \sqrt{2+\sqrt{5}} \nearrow +\infty$]

47. Rozhodněte, kde je funkce $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ prostá (tj. intervaly monotonie) a na těchto intervalech nalezněte její inverzní funkci.

[$f^{-1} = \frac{y \pm \sqrt{y^2+4}}{2}$]

48. Nalezněte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

[$-\infty \nearrow$ -3 $\searrow 1 \nearrow +\infty$]

49. Nalezněte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$

[$-\infty \nearrow 1 \searrow 5 \nearrow +\infty$]

50. Nalezněte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 9$

[$-\infty \nearrow +\infty$]

51. Nalezněte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + x^3 - 4x + 7$

[$-\infty \searrow$ -2 $\searrow 1 \nearrow +\infty$]

52. Nalezněte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = (x-4)^4(x+3)^3$

[$-\infty \nearrow$ -3 $\nearrow 0 \searrow 4 \nearrow +\infty$]

53. Nalezněte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$

[$-\infty \nearrow 1 \searrow +\infty$]

54. Nalezněte D_f, intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = \sqrt{x}\ln x$

[$D_f = (0,+\infty)$, $0 \searrow \mathrm{e}^{-2} \nearrow +\infty$]

55. Nalezněte D_f, intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = x^2 \ln x$

[$D_f = (0,+\infty)$, $0 \searrow \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \nearrow +\infty$]

56. Nalezněte D_f, intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = x \ln^2 x$

[$D_f = (0,+\infty)$, $0 \nearrow \mathrm{e}^{-2} \searrow 1 \nearrow +\infty$]

57. Nalezněte D_f, intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = \ln x - \operatorname{arctg} x$

[$D_f = (0, +\infty)$, $0 \nearrow +\infty$]

58. Nalezněte intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = x^3 - 6x^2 - 63x + 5$

[max -3, min 7]

59. Nalezněte D_f, intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $f(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x}$

[$D_f = (0, +\infty)$, $0 \searrow 1 \nearrow \mathrm{e}^2 \searrow +\infty$]