1 Derivace funkce

1.1 Definice

Definice 1.1 (Derivace funkce f v bodě a)
Pokud existuje limita
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$
nazýváme tuto limitu derivací funkce f v bodě a a značíme $f'(a)$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ nebo $f^{(1)}(a)$.

Definice 1.2 (Jednostranné derivace)
Pokud existuje limita
$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$
resp.
$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$
nazýváme tuto limitu derivací funkce f v bodě a zleva, resp. zprava a značíme $f'_-(a)$, resp. $f'_+(a)$.

Věta 1.3 (O limitě derivace)
Nechť pro funkci f a bod $a \in D_f$ platí, že

1. $\exists\delta>0$ tak, že f je diferencovatelná na $(a-\delta,a)$, resp. $(a,a+\delta)$,
2. funkce f je spojitá v bodě a zleva, resp. zprava,
3. $\exists \lim\limits_{x\to a-} f'(x)$, resp. $\exists \lim\limits_{x\to a+} f'(x)$.

Potom existuje $f'_-(a)$, resp. $f'_+(a)$ tak, že platí
$$f'_-(a)=\lim_{x\to a-}f'(x),\quad \text{resp.}\quad f'_+(a)=\lim_{x\to a+}f'(x).$$

Poznámka. Derivace vyšších řádů $f^{(n)}(x)=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}f(x)$ n. derivace. Definujeme pomocí indukce $f^{(n)}(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{(n-1)}(x)$, $n\in\mathbb{N}$.

1.2 Pravidla pro derivování

Věta 1.4 (Pravidla pro derivování)
Nechť $\alpha\in\mathbb{R}$, f a g mají v bodě x konečnou derivaci. Potom

1. $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$,
2. $(\alpha f)'(x)=\alpha f'(x)$
3. $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$,
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$, pokud $g(x)\neq 0$

Důkaz. Tvrzení 1. a 2. plynou přímo z definice derivace.

3.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)\overbrace{-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)}^{0}-f(x)g(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0} f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=$$

$$=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$$

4.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h)-\left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right)=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h\ g(x)g(x+h)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)\overbrace{-f(x)g(x)+f(x)g(x)}^{0}-f(x)g(x+h)}{h\ g(x)g(x+h)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))g(x)\ -\ f(x)(g(x+h)-g(x))}{h\ g(x)g(x+h)}=$$

$$=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

□

Věta 1.5 (Derivace funkce x^n)

$$f(x)=x^n,\quad n\in\mathbb{R}\quad\Rightarrow\quad f'(x)=nx^{n-1}.$$

Důkaz. Důkaz matematickou indukcí pro $n\in\mathbb{N}$. □

Věta 1.6 (Vztah derivace a spojitosti)
Nechť funkce f má v bodě a konečnou derivaci. Pak je v bodě a spojitá.

Důkaz.

$$\lim_{h\to 0} f(a+h)-f(a)=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}(f(a+h)-f(a))=\lim_{h\to 0} h\underbrace{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}_{\downarrow\ f'(a)\in\mathbb{R}}=0,$$

odkud $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$. □

Věta 1.7 (Leibnizovo pravidlo)
Nechť funkce f a g mají konečnou derivaci n. řádu. Pak

$$(f\cdot g)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}.$$

Poznámka. Nultá derivace funkce $f^{(0)}$ označuje původní funkci f, tj. $f^{(0)}=f$.

Poznámka. Kombinační číslo $\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$ pro $n\in\mathbb{N},k\in 0,...,n$.

Poznámka. Pro $n=1$ dává Leibnizovo pravidlo $(f\cdot g)'=f'g+fg'$.

1.3 Derivace složené funkce

Věta 1.8 (Řetězové pravidlo)
Nechť funkce g má konečnou derivaci v a a funkce f má konečnou derivaci v bodě $g(a)$. Potom

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Důkaz.

$$\lim_{x \to a} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

□

Důsledek 1.9 (Řetězové pravidlo pro více funkcí)

$$(f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ \cdots \circ f_n)' = f_1' \; f_2' \; f_3' \; \ldots \; f_n',$$

kde jsou kvůli přehlednosti vynechány body, ve kterých jsou derivace funkcí vyčísleny.

1.4 Derivace inverzní funkce

Věta 1.10 (Derivace inverzní funkce)
Nechť funkce f je prostá a f^{-1} je její inverzní funkce. Nechť funkce f má konečnou derivaci v bodě $x = f^{-1}(y)$. Potom

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Důkaz. Důkaz vychází z Věty **??** o inverzní funkci: $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$ a Věty 1.8 o derivaci složené funkce takto:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\Big(f(f^{-1}(y))\Big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\Big(y\Big),$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Big(\underbrace{f^{-1}(y)}_{x}\Big) \cdot \frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}y}\Big(y\Big) = 1,$$

odkud vydělením

□

1.5 Tečna a normála

Věta 1.11 (Rovnice tečny)
Nechť existuje konečná derivace funkce f v bodě a. Potom rovnice tečny $t_f(a)$ ke grafu funkce f v bodě a má rovnici

$$t_f(a) : y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Důkaz. Nechť pro malé h je s_h sečna procházející body $[a, f(a)]$ a $[a + h, f(a + h]$. Tato sečna má rovnici $s_h : y = k(h)x + q(h)$, kde

$$k(h) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}, \quad q(h) = f(a) - k(h)a.$$

Po limitním přechodu $h \to 0$ se sečna s_h stane tečnou $t_f(a)$ s rovnicí $t_f(a) : y = kx + q$, kde

$$k = \lim_{h \to 0} k(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a), \quad q = f(a) - f'(a)a.$$

Odtud plyne tvrzení věty. □

Věta 1.12 (Rovnice normály)
Nechť existuje konečná nenulová derivace funkce f v bodě a. Potom rovnice normály $n_f(a)$ ke grafu funkce f v bodě a má rovnici

$$n_f(a) : y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a).$$

Důkaz. Normála $n_f(a)$ ke grafu f v bodě a je přímka kolmá na tečnu $t_f(a)$ procházející bodem $[a, f(a)]$. Podle Věty 1.11 má tečna $t_f(a)$ rovnici v normálním tvaru

$$t_f(a) : f'(a)x - y + f(a) - af'(a) = 0,$$

kde koeficienty u x a y tvoří normálový vektor $(f'(a), -1)$. K němu kolmý vektor $(1, f'(a))$ je pak normálovým vektorem normály $n_f(a)$ s rovnicí v normálním tvaru

$$n_f(a) : x + f'(a)y + C = 0.$$

Konstanta C se určí z podmíky protnutí $n_f(a)$ a grafu f v bodě a jako $C = a + f'(a)f(a)$. Odtud již snadno plyne tvrzení věty. □

1.6 Derivace cyklometrických funkcí

1.6.1 Funkce arcsin

Funkce sin je prostá na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ a má inverzní funkci, kterou značíme arcsin.

$$D_{\arcsin} = H_{\sin} = [-1, 1]$$
$$H_{\arcsin} = D_{\sin} = [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

x [rad]	$\arcsin y$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	y	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

Věta 1.13 (Derivace funkce arcsin)

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{na} \quad (-1, 1)$$

Důkaz. Podle Věty 1.10: $(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'}$, kde $x = \sin y$. Položíme-li $y = \arcsin x$, máme vztah

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Už stačí jen upravit pravou stranu. Použijeme vztah mezi sin a cos: $\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z}$, který platí pro $\forall z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, kde dosadíme $z = \arcsin x$:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

□

1.6.2 Funkce arccos

Funkce cos je prostá na intervalu $[0, \pi]$ a má inverzní funkci, kterou značíme arccos.

$$D_{\arccos} = H_{\cos} = [-1, 1]$$
$$H_{\arccos} = D_{\cos} = [0, \pi]$$

x [rad]	$\arccos y$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	y	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

Lemma 1.14

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Důkaz. Rovnost

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$$

je ekvivalentní rovnosti

$$x = \sin(\arcsin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right).$$

Použijeme-li součtový vzorec pro funkci sin na pravé straně této rovnosti, dostaneme

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}\cos(\arccos x) - \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}\sin(\arccos x) = x.$$

□

Věta 1.15 (Derivace funkce arccos)

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{na} \quad (-1,1)$$

Důkaz. Plyne z Lemma 1.14. □

1.6.3 Funkce arctg

Funkce tg je prostá na intervalu $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a má inverzní funkci, kterou značíme arctg .

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{arctg}} &= H_{\mathrm{tg}} = \mathbb{R} \\ H_{\mathrm{arctg}} &= D_{\mathrm{tg}} = (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \\ \lim_{x\to+\infty} \mathrm{arctg}\ x &= \tfrac{\pi}{2} \\ \lim_{x\to-\infty} \mathrm{arctg}\ x &= -\tfrac{\pi}{2} \end{aligned}$$

x [rad]	arctg y	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tg x	y	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	nedef.

Věta 1.16 (Derivace funkce arctg)

$$(\mathrm{arctg}\ x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{na} \quad \mathbb{R}$$

Důkaz. Podle Věty **??**: $(\mathrm{arctg}\ x)' = \frac{1}{(\mathrm{tg}\, y)'}$, kde $x = \mathrm{tg}\, y$. Položíme-li $y = \mathrm{arctg}\ x$, máme vztah

$$(\mathrm{arctg}\ x)' = \cos^2(\mathrm{arctg}\ x).$$

Už stačí jen upravit pravou stranu. Použijeme následující převod mezi cos a tg :

$$\frac{1}{\cos^2 z} = \frac{\cos^2 z + \sin^2 z}{\cos^2 z} = 1 + \mathrm{tg}^2 z,$$

odkud

$$\cos^2 z = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 z},$$

kde dosadíme $z = \mathrm{arctg}\ x$. □

1.6.4 Funkce arccotg

Funkce cotg je prostá na intervalu $(0, \pi)$ a má inverzní funkci, kterou značíme arccotg .

$$\begin{aligned} D_{\text{arccotg}} &= H_{\text{cotg}} = \mathbb{R} \\ H_{\text{arccotg}} &= D_{\text{cotg}} = (0, \pi) \\ \lim_{x \to +\infty} &\operatorname{arccotg} x = 0 \\ \lim_{x \to -\infty} &\operatorname{arccotg} x = \pi \end{aligned}$$

x [rad]	arccotg y	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cotg x	y	nedef.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Lemma 1.17

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Důkaz. Rovnost

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x$$

je ekvivalentní rovnosti

$$x = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x\right)}.$$

Použijeme-li součtový vzorec pro funkci sin a cos na pravé straně této rovnosti, dostaneme

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x\right)} = \frac{\overbrace{\sin\frac{\pi}{2}}^{1} \cos(\operatorname{arccotg} x) - \overbrace{\cos\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(\operatorname{arccotg} x)}{\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} \cos(\operatorname{arccotg} x) + \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} \sin(\operatorname{arccotg} x)} = \operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x) = x.$$

□

Věta 1.18 (Derivace funkce arccotg)

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad \text{na} \quad \mathbb{R}$$

Důkaz. Plyne z Lemma 1.17. □