1 $\boxed{\text{Úvod}}$

V této úvodní kapitole se seznámíme se základními matematickými pojmy, značením, operacemi s množinami a základy matematické logiky. Dále jsou zde stručně probrány číselné množiny, intervaly, pojem omezenosti množiny, horní hranice (závora) množiny a konečně význam absolutní hodnoty čísla.

1.1 Množiny

Definice 1.1 (Naivní definice množiny — Cantor 1873)
Soubor dobře definovaných a dobře rozlišitelných objektů se nazývá **množina**. Množiny zapisujeme ve tvaru

$$M = \{\text{prvek } x \ : \ \text{vlastnosti prvku } x\}.$$

Definice 1.2 (Operace s množinami)
Nechť A a B jsou nějaké množiny a x je prvek. Potom definujeme následující symboly:

$x \in A$	prvek x náleží množině A.
$x \notin A$	prvek x nenáleží množině A.
$A \subset B$	množina A je částí množiny B.
$A \cup B$	sjednocení množin A a B.
$A \cap B$	průnik množin A a B.
$\emptyset$	prázdná množina.
$A = \{x : V\}$	zápis množiny, která má prvky x, o kterých platí vlastnost V, např. $V : x > 0$.

Poznámka. Vlastnosti prázdné množiny $\emptyset$:

- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$

Příklad. Nechť $A = \{♀\}$, $B = \{♂, ♀\}$, pak platí:

- $A \subset B$
- $A \cap B = \{♀\} = A$
- $A \cup B = \{♂, ♀\} = B$

Definice 1.3 (Kartézský součin množin A a B)

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ a } y \in B\}$$

1.2 Výroky

Definice 1.4 (Výrok)
Výrok je tvrzení, o kterém můžeme rozhodnout zda platí nebo neplatí.

Definice 1.5 (Přehled operací s výroky)
Nechť V_1 a V_2 jsou výroky. Potom definujeme následující značení:

V_1	výrok V_1 (platí).
$\neg V_1$	negace výroku V_1 (výrok V_1 neplatí).
$V_1 \wedge V_2$	konjunkce - platí V_1 a zároveň V_2.
$V_1 \vee V_2$	disjunkce - platí V_1 nebo V_2.
$V_1 \Rightarrow V_2$	implikace - když platí V_1 , pak platí V_2.
$V_1 \Leftrightarrow V_2$	ekvivalence - V_1 platí právě tehdy, když platí V_2.
$\exists$	existenční kvantifikátor - existuje **aspoň** jeden prvek ...
$\exists_1$ nebo $\exists!$	existenční kvantifikátor - existuje **právě** jeden prvek ...
$\exists_\infty$	existenční kvantifikátor - existuje **nekonečně** prvků ...
$\forall$	kvantifikátor: **pro všechny** prvky ...

Poznámka. Výlučná disjunkce (exkluzivní disjunkce, non-ekvivalence): $(V_1 \vee V_2) \wedge \neg(V_1 \wedge V_2)$.

Definice 1.6 (Tabulka pravdivostních hodnot pro operace s výroky)
V následující tabulce **P** znamená platí a **N** neplatí:

V_1	V_2	$V_1 \wedge V_2$	$V_1 \vee V_2$	$V_1 \Rightarrow V_2$	$V_1 \Leftrightarrow V_2$
P	P	P	P	P	P
P	N	N	P	N	N
N	P	N	P	P	N
N	N	N	N	P	P

Lemma 1.7
Pravidla při negování výroků (z definice 1.6):

1. $\neg(V_1 \vee V_2) = \neg V_1 \wedge \neg V_2$
2. $\neg(V_1 \wedge V_2) = \neg V_1 \vee \neg V_2$
3. $\neg(V_1 \Rightarrow V_2) = V_1 \wedge \neg V_2$
4. $\neg(\exists x \in M) = \forall x \in M$
5. $\neg(\forall x \in M) = \exists x \in M$

1.3 Číselné množiny

Definice 1.8 (Značení číselných množin)

Přirozená čísla $\mathbb{N}$,	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}$.
Celá čísla $\mathbb{Z}$,	$\mathbb{Z} = \{\ldots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$.
Racionální čísla $\mathbb{Q}$,	$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \; : \; p \in \mathbb{Z} \; ; \; q \in \mathbb{N}\}$.
Reálná čísla $\mathbb{R}$.	
Iracionální čísla $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.	
Komplexní čísla $\mathbb{C}$,	$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.

Lemma 1.9 (Vlastnosti reálných čísel)
Nechť a, b, c jsou reálná čísla. Potom platí:

1. $(a < b) \vee (a > b) \vee (a = b)$
2. $(a < b) \wedge (b < c) \Rightarrow (a < c)$ transitivita
3. $(a + b < a + c) \Rightarrow (b < c)$

4. $(a < b) \wedge (c > 0) \Rightarrow ac < cb$
   $(a < b) \wedge (c < 0) \Rightarrow ac > cb$

Věta 1.10 (O hustotě $\mathbb{R}$)
Mezi libovolnými různými reálnými čísly je nekonečně mnoho racionálních a nekonečně mnoho iracionálních čísel.

Důsledek 1.11
Neexistuje nejmenší kladné reálné číslo.

Důkaz. **Sporem**. Principem důkazu sporem je ukázat, že negace tvrzení vede ke sporu. Matematická věta je obvykle zapsána pomocí implikace výroků

$$\text{Předpoklad} \;\Rightarrow\; \text{Tvrzení}, \tag{1}$$

přičemž podle pravidel negování výroku (Lemma 1.7) je její negace

$$\neg(\text{Předpoklad} \;\Rightarrow\; \text{Tvrzení}) = \text{Předpoklad} \;\wedge \neg\text{Tvrzení}, \tag{2}$$

Uvažujme následující slovní vyjádření výroku (ozn. V): *Není pravda, že by existovalo kladné reálné číslo, které by bylo menší než všechna ostatní reálná čísla (různá od tohoto čísla).* Kvantifikovaně lze výrok V vyjádřit takto:

$$V = \neg(\exists c \in \mathbb{R}, c > 0)(\forall r \in \mathbb{R}, r > 0, r \neq c)(c < r)$$

Tento výrok lze převést pomocí pravidel pro negování výrazů s $\exists$ a $\forall$ na výrok

$$V = (\forall c \in \mathbb{R}, c > 0)(\exists r \in \mathbb{R}, r > 0, r \neq c)(c \geq r),$$

které vyjadřuje ekvivalentní tvrzení *Pro všechna kladná reálná čísla c existuje aspoň jedno reálné číslo r takové, že je ostře menší než c.*

Pro důkaz sporem tedy předpokládejme, že platí negace výroku V, to jest

$$\neg V = (\exists c \in \mathbb{R}, c > 0)(\forall r \in \mathbb{R}, r > 0, r \neq c)(c < r)$$

Označme si toto nejmenší číslo, které nyní předpokládáme, že existuje, symbolem c_{min}. Potom ale podle věty 1.10 mezi čísly 0 a c_{min} existuje alespoň jedno číslo x tak, že $0 < x < c_{min}$. Tedy díky větě 1.10 snadno nalezneme kladné reálné číslo, které je menší než údajně nejmenší číslo c_{min}, což je **spor**. □

1.4 Důkaz matematickou indukcí

Poznámka. Princip důkazu tvrzení $V[n]$ matematickou indukcí. Tvrzení $V[n]$ nazýváme **indukční předpoklad**.

1. **První krok.** Ověříme, že tvrzení platí pro nejnižší index, např. že $V[1]$ platí.

2. **Indukční krok $n \to n+1$.** Za předpkladu, že platí $V[n]$, dokážeme platnost $V[n+1]$.

1.5 Intervaly

Definice 1.12 (Interval)
Otevřený interval $(a, b) = \{ \, x \in \mathbb{R} \; : \; a < x < b \, \}$
Uzavřený interval $[a, b] = \{ \, x \in \mathbb{R} \; : \; a \leq x \leq b \, \}$
Polootevřený (polouzavřený) interval $[a, b) = \{ \, x \in \mathbb{R} \; : \; a \leq x < b \, \}$

Definice 1.13 (Nekonečno)
Pro symbol $+\infty$ platí, že $(\forall x \in \mathbb{R})(x < +\infty)$.
Pro symbol $-\infty$ platí, že $(\forall x \in \mathbb{R})(x > -\infty)$.

1.6 Omezenost množin

Definice 1.14 (Omezenost množiny)

Říkáme, že množina M je omezená shora $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $(\exists h \in \mathbb{R})(\forall x \in M)(x \leq h)$.
Říkáme, že množina M je omezená zdola $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $(\exists d \in \mathbb{R})(\forall x \in M)(x \geq d)$.
Říkáme, že množina M je omezená $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ je omezená shora i zdola.
Říkáme, že množina M je neomezená $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ není omezená shora ani zdola.

Definice 1.15 (Závora množiny)
Číslo h, resp. d z definice 1.14 nazvýváme horní, resp. dolní závora (hranice) množiny M.

1.7 Absolutní hodnota

Definice 1.16 (Absolutní hodnota)
Absolutní hodnota čísla $x \in \mathbb{R}$ je

$$|x| = \begin{cases} x & \text{pro} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{pro} \quad x < 0 \end{cases} .$$

Poznámka. Platí $|x| = \max\{x, -x\}$ a hlavně $\sqrt{x^2} = |x|$.

Věta 1.17 (Trojúhelníková nerovnost $\triangle \neq$)

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Důkaz. Platí:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2,$$

kde po odmocnění levé a pravé strany nerovnosti dostáváme

$$|a + b| \leq \big||a| + |b|\big| = |a| + |b|.$$

□

Důsledek 1.18

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|.$$

Důkaz.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geq |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 = (|a| - |b|)^2,$$

kde po odmocnění levé a pravé strany nerovnosti dostaneme tvrzení věty. □