1. Fotonový plyn a záření absolutně černého tělesa

Budiž naším sledovaným systémem dutina v nějakém neprůhledném materiálu (model absolutně černého tělesa). Nechť má dutina objem V a obsahuje velký počet fotonů, které jsou nerozlišitelné a neřídí se Pauliho vylučovacím principem. Jsou to tedy bosony a řídí se Bose-Einsteinovou statistikou.

Střední počet fotonů s frekvencí v intervalu $\omega, \omega + d\omega$ je dán takto

$$dN_\omega = N_\omega d\Gamma_\omega$$

Rozdělení N_ω získáme dosazením za energii do BE statistiky

$$N_\omega = \frac{1}{\exp(\beta(\hbar\omega - \mu)) - 1}$$

Abychom určili μ potřebovali bychom znát střední počet fotonů. Ten je ale dán danými podmínkami, teplotou T a objemem nádoby V. Proto určíme μ z podmínek rovnováhy

$$0 = (dF)_{T,V} = \mu dN$$

a proto je $\mu = 0$. Váhový faktor $d\Gamma_\omega$ určíme následujícím způsobem. Pro vlnový vektor $\mathbf{k}$ platí

$$k_x = \frac{2\pi n_1}{L_x} \qquad k_y = \frac{2\pi n_2}{L_y} \qquad k_z = \frac{2\pi n_3}{L_z}$$

kde L_x, L_y, L_z jsou strany kvádru ve kterém je záření uzavřeno a n_i jsou přirozená čísla. Bude-li vlnová délka záření mnohem menší než rozměr kvádru, budou se blízké hodnoty $\mathbf{k}$ lišit jen nepatrně a můžeme nalézt počet ΔM těchto vektorů v intervalu $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$. Jejich počet je

$$\Delta M = \Delta n_1 \Delta n_2 \Delta n_3$$

dosadíme ze Δn_i

$$\Delta M = \frac{1}{(2\pi)^3} L_x L_y L_z \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3\mathbf{k}$$

Při daném vektoru $\mathbf{k}$ existují dvě polarizace, počet kvantových stavů (váhový faktor) $d\Gamma(\mathbf{k}) = 2\Delta M$. Dále provedeme integraci přes úhly, dosadíme za $k = \frac{\omega}{c}$ a vyjde

$$d\Gamma_\omega = \frac{V\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$$

dosadíme do dN_ω

$$dN_\omega = \frac{1}{\exp(\beta h\omega) - 1} \frac{V\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$$

Hustotu energie $u(\omega, T)$ ve frekvenčním intervalu získáme tak, že vezmeme střední počet fotonů v intervalu $d\omega$, vynásobíme je jejich energií $\hbar\omega$ a vydělíme objemem.

$$u(\omega, T)d\omega = \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}$$

To je slavný *Planckův vyzařovací zákon*. Z tohoto vzorce lze získat zajímavé výsledky. Ke zjištění vlnové délky, při níž je hustota energie největší, zavedeme substituci $\omega = 2\pi c/\lambda$ [1].

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

a vyřešíme rovnici

$$\frac{du(\lambda)}{d\lambda} = 0$$

[1] nezapomeňte dosadit i za $d\omega$

Po zderivování dostaneme

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = 8\pi hc \left(\frac{hc}{kT\lambda^7} \frac{e^{hc/\lambda kT}}{\left(e^{hc/\lambda kT}-1\right)^2} - \frac{1}{\lambda^6} \frac{5}{e^{hc/\lambda kT}-1} \right) = 0$$

což jde zjednodušit na

$$\frac{hc}{\lambda kT} \frac{e^{hc/\lambda kT}}{e^{hc/\lambda kT}-1} - 5 = 0$$

když si navíc zadefinujeme

$$x \equiv \frac{hc}{\lambda kT}$$

pak se rovnice výše jednodušší na

$$\frac{xe^x}{e^x-1} - 5 = 0$$

Tato transcendentní rovnice má numerické řešení rovno $x \doteq 4,9651$.

Ze znalosti x už snadno určíme vlnovou délku λ

$$\lambda_{max} = \frac{hc}{x}\frac{1}{kT} \doteq \frac{2,898 \cdot 10^6 \text{ nm} \cdot \text{K}}{T}$$

To je *Wienův posunovací zákon*, který vyjadřuje, že maximum ve spektru záření absolutně černého tělesa se s rostoucí teplotou stále více posunuje k menším vlnovým délkám (větším frekvencím). Pokud bychom na začátku neprovedli substituci a spočetli přímo ν_{max}, dospěli bychom k hodnotě

$$\nu_{max} \doteq T \cdot 5,879 \cdot 10^{10} \text{ Hz} \cdot \text{K}^{-1}$$

Stojí za povšimnutí, že $\nu_{max}\lambda_{max} \doteq 0.568c \neq c$. Tento fakt byl skutečně experimentálně potvrzen.

Dalším zajímavým výsledkem je celková hustota energie (všechny frekvence) uvnitř dutiny:

$$u = \int_0^\infty u(\omega)d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1}$$

Provedeme-li substituci, dostáváme

$$u = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{(kT)^4}{\hbar^4} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

kde všechno až na T^4 je konstantní a tedy

$$u(T) = \sigma T^4$$

což je *Stefan-Boltzmannův zákon*. Hodnota Stefanovy konstanty je

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{15\hbar^3 c^3} \doteq 7,561.10^{-16} Jm^{-3}K^{-4}$$

Spočteme emisní intenzitu vyzařování temného tělesa. Je-li záření v rovnováze, potom je intenzita dopadajícího záření I_i rovna intenzitě vyzařovaného záření I_e. Za jednotku času u prostorového úhlu $d\Omega$ pod úhlem ϑ k normále na jednotkovou plochu stěny dopadá energie

$$I_i(\omega, T, \Omega)d\omega d\Omega = \frac{c}{4\pi} u(\omega, T) \cos\vartheta d\omega d\Omega$$

4π je tam proto, že záření v dutině je ve všech směrech stejné (izotropní) a $\cos\vartheta$ odpovídá tomu, že čím je větší odklon zdroje od kolmice, tím menší jednotkovou plošku stěny „vidí“. Celkovou

dopadající intenzitu I_e získáme prostě tak že tento vztah vyintegrujeme přes horní polosféru (světlo může na objekt dopadat jen zvenku) a přes všechny frekvence

$$I_i = I_e = \int_0^\infty d\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{2\pi} \sin(\vartheta) d\varphi \frac{c}{4\pi} u(\omega, T) \cos\vartheta = \frac{1}{4} c\sigma T^4$$

Stefanova konstanta se z praktických důvodů zavádí takto

$$\sigma' = \frac{1}{4}c\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60\hbar^3 c^2} = 5,67 \cdot 10^{-8} \mathrm{Wm}^{-2}\mathrm{K}^{-4}$$

Poznámka 1. Pro tlak záření platí

$$p(T) = \frac{u(T)}{3}$$

na rozdíl od běžných plynů, jejichž tlak je $p = \frac{2}{3}\frac{U}{V}$. To je dáno tím, že fotonový plyn je relativistický a neplatí pro něj vztah mezi kinetickou energií a hybností $E_k = p^2/2m$.

Když známe vztah pro tlak, tak už není problém odvodit adiabatu fotonového plynu. Spočítá se stejně jako u IP, jenom za tlak a vnitřní energii se dosadí vzorce pro fotonový plyn.

Vyjdeme z předpokladu $u(T) = \frac{U(T)}{V} = \frac{C_V T}{V}$.

$$\begin{aligned}
0 = \eth Q &= dU + pdV \\
dU &= -pdV \\
C_V dT &= -\frac{1}{3}\frac{C_V T}{V} dV \\
-3\frac{dT}{T} &= \frac{dV}{V} \\
\ln T^{-3} + \ln K &= \ln V \\
VT^3 &= K
\end{aligned}$$

Tímto modelem můžeme částečně zdůvodnit ochlazování vesmíru za několika předpokladů:

- Vesmír je adiabaticky izolovaný. To je téměř filozofický fundamentální předpoklad.
- Většinu vesmíru můžeme aproximovat fotonovým plynem. Vzhledem k tomu, že ve vesmíru dohromady skoro nic není, to je celkem dobrá aproximace.
- Vesmír se rozpíná (což je pozorováno i experimentálně).
- Termalizace plynu probíhá mnohem rychleji než rozpínání (aby naše kvazistacké výpočty měly smysl), což nemusí být pravda v pozdějších fázích vývoje vesmíru.