1 Reprezentace Lieových grup a algeber

Definice 1. **Reprezentace Lieovy grupy** G na vekt. prostoru V je hladký homomorfismus $\phi : G \to GL(V)$.

Poznámka 1. V případě $\dim G = +\infty$ je vhodné uvažovat $\mathscr{H}$ a $\phi : G \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$.

Definice 2. **Reprezentace Lieovy algebry** $\mathfrak{g}$ na vekt. prostoru V je (hladký) homomorfismus $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. (Tedy ϕ je lineární a platí $[\phi(X), \phi(Y)] = \phi([X, Y])$.

Příklad 1. Reprezentace $\mathfrak{so}(3)$ na $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$: $\phi(X_i) = \varepsilon_{ijk} x_k \partial_j$ (sumace podle dolních indexů).

Definice 3. Reprezentace G (resp. $\mathfrak{g}$) je **věrná**, právě když ϕ je prosté zobrazení (monomorfismus).

Poznámka 2. Na základě věrné reprezentace jsme schopni zrekonstruovat G (resp. $\mathfrak{g}$), proto nazýváme věrné reprezentace **realizací** dané G (resp. $\mathfrak{g}$), např. $\mathfrak{so}(3)$ jako matice nebo vektorová pole z př. 1.

Definice 4. Buď $\Sigma \subset \mathfrak{gl}(V)$. Σ je

- **reducibilní** $\Leftrightarrow (\exists W \subset\subset V, W \notin \{V, \{0\}\})(\Sigma W \subset W)$,
- **ireducibilní** $\Leftrightarrow (\forall W \subset\subset V, W \neq V)((\Sigma W \subset W) \Rightarrow W = \{0\})$,
- **úplně reducibilní** $\Leftrightarrow (\forall W \subset\subset V, \Sigma W \subset W)(\exists \tilde{W} \subset\subset V, \Sigma \tilde{W} \subset \tilde{W})(V = W \oplus \tilde{W})$.

Reprezentace G (resp. $\mathfrak{g}$) je ireducibilní (reducibilní, úplně reducibilní) právě tehdy když $\phi(G)$ (resp. $\phi(\mathfrak{g})$) je ireducibilní (reducibilní, úplně reducibilní).

Příklad 2. Reprezentace $\phi : G \to \mathcal{U}(\mathscr{H})$ (**unitární reprezentace**) jsou úplně reducibilní, protože z unitarity platí $\phi(G)W \subset W \Rightarrow \phi(G)W^\perp \subset W^\perp$. Navíc na úrovni algeber platí $\phi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{u}(\mathscr{H})$ a pomocí exponenciely dostaneme pro $X \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}\phi(\mathrm{e}^X) = \mathrm{e}^{\phi_*(X)} \quad \Rightarrow \quad \left(\phi(\mathrm{e}^X)\right)^+ &= \phi(\mathrm{e}^X)^{-1} = \mathrm{e}^{-\phi_*(X)} \\ &= \left(\mathrm{e}^{\phi_*(X)}\right)^+ = \mathrm{e}^{(\phi_*(X))^+}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \left(\phi_*(X)\right)^+ = -\phi_*(X)$, tj. $\phi_*(X)$ jsou antihermitovské matice, $\mathfrak{u}(\mathscr{H}) = \left\{B \in \mathfrak{gl}(\mathscr{H}) \middle| B + B^+ = 0\right\}$.

Ve fyzice se obvykle používají hermitovské matice, proto se definují **fyzikální veličiny**

$$A \mapsto A_{\mathrm{F}} = -\mathbf{i}A\,. \tag{1}$$

A_{F} již splňují $A_{\mathrm{F}}^+ = A_{\mathrm{F}}$.

Shurovo lemma

Věta 1. V vektorový prostor nad $\mathbb{C}$, $\dim V < +\infty$, $\Sigma \subset \mathfrak{gl}(V)$ ireducibilní. Potom $\forall A \in \mathfrak{gl}(V)$: $([A, \Sigma] = 0 \Rightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{C})(A = \lambda \mathbb{1}))$.

Důkaz. $A \in \mathfrak{gl}(V) \quad \Rightarrow \quad \sigma(A) \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{C} : W = \ker(A - \lambda\mathbb{1}) \neq \{\vec{0}\} \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda\mathbb{1})\Sigma W = \Sigma(A - \lambda\mathbb{1})W = 0 \quad \Rightarrow \quad \Sigma W \subset \ker(A - \lambda\mathbb{1}) \quad \Rightarrow \quad W$ je invariantní podprostor $\Rightarrow$ $W = V$ □

Věta 2. V nad $\mathbb{C}$, $\Sigma \subset \mathfrak{gl}(V)$ úplně reducibilní. Pokud platí $(\forall A \in \mathfrak{gl}(V))([A, \Sigma] = 0 \Rightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{C},\ A = \lambda\mathbb{1}))$, potom Σ je ireducibilní.

Důkaz. $W \neq \{\vec{0}\}$ invariantní podprostor $\Rightarrow$ $\exists \widetilde{W}$ invariantní podprostor takový, že $V = W \oplus \widetilde{W}$, $\forall S \in \Sigma,\ S : W \to W,\ S : \widetilde{W} \to \widetilde{W} \quad \Rightarrow$ definujeme $A : A|_W = \lambda\mathbb{1},\ A|_{\widetilde{W}} = \widetilde{lambda}\mathbb{1}$, tj. $AW \subset W,\ A\widetilde{W} \subset \widetilde{W} \quad \Rightarrow \quad [A, S] = 0,\ \forall S \in \Sigma \quad \Rightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{C},\ A = \lambda\mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{W} = \{\vec{0}\} \quad \Rightarrow$ $V = W$. □