1 Nástin teorie integrabilních distribucí

Definice 1. k-rozměrná distribuce na varietě M, $\dim M = n \geqslant k$, je hladké zobrazení, které každému $p \in M$ přiřazuje k-rozměrný podprostor v T_pM. Značíme $\Delta_k(p) \subset T_pM$, $\dim \Delta_k(p) = k$.

Poznámka 1. Hladkost z předcházející definice chápeme ve smyslu: $\forall p \in M$, $\exists U = U^\circ$, $p \in U$, $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(U)$ tak, že $\Delta_k(q) = \operatorname{span}\left\{ X_1|_q, \dots, X_k|_q \right\}$, $\forall q \in U$.

Definice 2. Integrální podvarieta dimenze l distribuce Δ_k je vložená podvarieta N dimenze l taková, že $\forall p \in N$ je $T_pN \subset \Delta_k(p)$.

Definice 3. Distribuce Δ_k je (úplně) integrabilní právě tehdy, když $\forall p \in M$ existují na okolí U bodu p souřadnice $\left(x^1, \dots x^k, y^1, \dots, y^{n-k}\right)$ takové, že rovnice $y^j = konst_j, \forall j \in \widehat{n-k}$ definují k-rozměrné integrální podvariety distribuce Δ_k. Takové (x, y) se nazývá Frobeniova mapa.

Věta 1. (Frobeniova) Δ_k je úplně integrabilní $\Leftrightarrow [\Delta_k, \Delta_k] \subset \Delta_k$, to znamená
$\forall U = U^\circ \subset M,\ \forall X, Y \in \mathcal{X}(U),\ \forall p \in U : X(p), Y(p) \in \Delta_k(p) \quad \Rightarrow \quad \forall q \in U,\ [X, Y](q) \in \Delta_k(q)$.
Bez důkazu.

Poznámka 2. Používá se zápisu $[X, Y] \in \Delta_k \quad \Leftrightarrow \quad \forall q \in U,\ [X, Y](q) \in \Delta_k(q)$.

Poznámka 3. $[\Delta_k, \Delta_k](p) = \operatorname{span}\left\{ [X_1, X_2]|_p \middle| X_1, X_2 \in \mathcal{X}(U), p \in U = U^\circ, \forall q \in U : X_1|_q, X_2|_q \in \Delta(q) \right\}$

Poznámka 4. Integrabilní podvariety M, N, pro které $M \cap N \neq \emptyset$ lze navazovat, tj. vytvářet podvariety postupem $O = M \cup N$.

Definice 4. Sjednocením ntegrrálních podvariet získáme listy distribuce Δ_k. **Maximální list** je takový, ke kterému už nelze přidat žádnou integrální podvarietu. Maximální listy tvoří tzv. foliaci variety danou integrabilní distribucí.

Poznámka 5. Nejedná se obecně o vložení, protože se vloženost může narušit nekonečným sjednocením (viz příklad s T^2).

Věta 2. (Chevalley) Maximální listy integrabilní distribuce jsou prostě vnořené podvariety. Bez důkazu.

Důsledek 1. Pro Lieovu grupu G a algebru $\mathfrak{g}$ a podalgebru $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, splňující $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ je podvarieta H z poznámky **??** maximální list integrabilní distribuce určené $\mathfrak{h}$ procházející e. H je podgrupa, protože díky levoinvariantnosti $\mathfrak{h}$ je gH opět maximální list. Ten je z definice buď totožný s původním nebo s ním má prázdný průnik. Ale pokud $g \in H \quad \Rightarrow \quad ge = g \in H \quad \Rightarrow \quad gH = H$. Obdobně $g \in H \quad \Rightarrow \quad g^{-1}H = H$, protože $g^{-1}g = e \in H \quad \Rightarrow \quad g^{-1} \in H$.