1 Definice Lieovy grupy a Lieovy algebry

Definice 1. **Lieova grupa** je diferencovatelná varieta G vybavená navíc zobrazením $\cdot : G \times G \to G$ takovým, že $(G, \cdot)$ je grupa a zobrazení $\cdot$ a $(\cdot)^{(-1)}$ jsou hladká.

Poznámka 1. Podle V. Hilbertova problému postačuje $\cdot$ a $(.)^{-1}$ spojité, G topologický prostor lokálně homomorfní $\mathbb{R}^n$, z toho už plyne hladkost. Bez důkazu.

Příklad 1. $G = GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} | \det A \neq 0\}$ je Lieova grupa ($\cdot$ je násobení matic), $\dim GL(n, \mathbb{R}) = n^2$.

Zobrazení $\det : \mathbb{R}^{n,n} \to \mathbb{R}$ je $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n,n}, \mathbb{R})$, G je tedy podmnožina $\mathbb{R}^{n,n}$ a varieta protože platí $G = \det^{(-1)}(\mathbb{R}\backslash\{0\}) = GL(n, \mathbb{R})^\circ$. Podmínka hladkosti na $\cdot$ a $()^{-1}$ plyne z $(AB)^i{}_j = A^i{}_k B^k{}_j$ a $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{\mathrm{adj}}$.

Poznámka 2. $GL(n, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{n,n} = \mathbb{C}^{n \cdot n} = \mathbb{R}^{2n \cdot n}, \dim GL(n, \mathbb{C}) = 2n^2$

Definice 2. **Maticové Lieovy grupy** jsou podgrupy $GL(n, \mathbb{R})$ nebo $GL(n, \mathbb{C})$.[1]

Příklad 2. $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) | \det A = 1\}$ je maticová Lieova grupa.

Splnění podmínky pro varietu je přímo vidět z rovnice $\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}\pi \prod_{i=1}^n A_{i,\pi(i)} = 1$ (A_{ij} značí prvky matice A). Pro $n = 2$ lze změnou báze převést podmínku dokonce na kvadriku $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - 1 = 0$ v $\mathbb{R}^4$. Že se jedná o podgrupu je zřejmé z $\det(AB^{-1}) = \frac{\det A}{\det B} = 1$, tj. $AB^{-1} \in SL(n, \mathbb{R})$.

Poznámka 3. Význačné difeomorfismy na G jsou pro $g \in G$ $L_g, R_g : G \to G$ definované $L_g h = gh$, $R_g h = hg$, $\forall h \in G$. Nazývají se **levé** a **pravé translace**.

Definice 3. **Levoinvariantní** a **pravoinvariatní vektorová pole** $X \in \mathcal{X}(G)$ jsou vektorová pole splňující $X = L_{g*}X$, $X = R_{g*}X$.

Poznámka 4. Bodově předchozí definice znamená $X|_{gh} = L_{g*}(X|_h)$, resp. $X|_{hg} = R_{g*}(X|_h)$, $\forall g, h \in G$.

Poznámka 5. Levoinvariantní vektorové pole je jednoznačne určeno tečnými vektory v libovolném pevně zvoleném bodě $g \in G$ (obvykle se volí e), tj. $X|_g = L_{g*}(X|_e)$ protože $L_g \cdot L_h = L_{gh}$, $L_{g*} \cdot L_{h*} = L_{gh*}$.

Věta 1. Vektorový prostor levoinvariantních vektorových polí $\mathfrak{g} \subset\subset \mathcal{X}(G)$ je izomorfní T_eG, tj. $\mathfrak{g} \simeq T_eG$.

Důkaz. Mějme $\tilde{X} \in T_eG$, pak $X : G \to TG$, $X(g) = L_{g*}(\tilde{X})$, tj. $X_g \in T_gG$. Použitím

$$\gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \to G, a < 0 < b, \dot{\gamma}(0) = \tilde{X} \quad \Rightarrow \quad \varphi(g, t) = g \cdot \gamma(t) = L_g(\gamma(t)) \in \mathcal{C}^\infty$$

je díky hladkosti φ vidět, že $X(g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \varphi(g, t) \in T_gG$ závisí na g hladce:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \varphi(g, t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} L_g(\gamma(t)) = L_{g*} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \gamma(t) = L_{g*}(\tilde{X})$$

□

Při výpočtech tak mohou vzniknout nejasnosti ve značení, kdy symbolem $X \in \mathfrak{g}$ můžeme značit vektorové pole na G nebo pouze vektor z T_eG. V příkladech, kde budeme tyto pojmy ilustrovat v praxi, budeme tyto pojmy rozlišovat. (Obvykle X vektorové pole, $X|_g$ vektor v bodě g, $X(g)$ jeho složky). Jinak budeme za prvky $\mathfrak{g}$ považovat vektory z T_eG, protože je s nimi jednodušší práce než s vektorovými poli (v případě maticových grup se výpočty zjednoduší na počítání s maticemi).

[1] S grupami, které nejsou maticové se v LIAG přímo nesetkáme, ale že tento pojem není prázdný ukazuje existence Lieovy grupy, která není maticová (viz `http://en.wikipedia.org/wiki/Metaplectic_group`).

Poznámka 6. Připomenutí, kotečné zobrazení působí na funkce $(\phi^* f)(p) = (f \circ \phi)(p)$. Lze tak ekvivalentně definovat tečné zobrazení $(\phi_* X)(f) = X(\phi^* f)$.

Věta 2. Levoinvariantní pole splňuje $L_g^* \circ X = X \circ L_g^*$.

Důkaz. Pro $\psi : M \to N$, $p \in M$, $X \in T_p M$, $f \in C^\infty(N)$ platí:

$$\psi_*(X)f = X(f \circ \psi) = X(\psi^*(f)) = (X \circ \psi^*)f.$$

Tudíž pro L_{g*}, $X \in \mathfrak{g}$ platí:

$$\begin{aligned} L_{g*}(\,X|_h)f &= (\,X|_h \circ L_g^*)f = \Big((X \circ L_g^*)f\Big)(h) \\ &= X|_{gh} f = (Xf)(gh) = (Xf)(L_g h) = \Big(L_g^*(X(f))\Big)(h) = \Big((L_g^* \circ X)f\Big)(h) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \qquad X \circ L_g^* = L_g^* \circ X.$ □

Důsledek 1. $L_g^* \circ [X, Y] = [X, Y] \circ L_g^*$.

Důkaz.

$$L_g^* \circ [X,Y] = L_g^* \circ X \circ Y - L_g^* \circ Y \circ X = X \circ L_g^* \circ Y - Y \circ L_g^* \circ X = X \circ Y \circ L_g^* - Y \circ X \circ L_g^* = [X,Y] \circ L_g^*$$

□

Definice 4. $\mathfrak{g} = \{X \in \mathcal{X}(G) | X = L_{g*}X\}$ nazýváme **Lieova algebra Lieovy grupy** G.

Definice 5. **Lieova algebra** $(A, \oplus, \odot, [\cdot,\cdot])$ je vektorový prostor $(A, \oplus, \odot)$ vybavený bilineárním zobrazením $[\cdot,\cdot] : A \times A \to A$ splňujícím:

1. $[X,Y] = -[Y,X]$, $\forall X, Y \in A$,
2. $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$, $\forall X,Y,Z \in A$ (Jacobiho identita).

$[\cdot,\cdot]$ se nazývá **Lieova závorka**.

Definice 6. Uvažujme bázi (X_i) prostoru A, $[\cdot,\cdot]$ je určena působením na bazické vektory, $[X_i, X_j] = c_{ij}{}^k X_k$. $c_{ij}{}^k$ se nazývají **strukturní konstanty**, splňují

$$c_{ij}{}^k = -c_{ji}{}^k\,, \qquad\qquad c_{il}{}^m c_{jk}{}^l + c_{jl}{}^m c_{ki}{}^l + c_{kl}{}^m c_{ij}{}^l = 0\,. \tag{1}$$

Poznámka 7. Pro maticové Lieovy grupy jsou Lieovy algebry vektorové prostory matic odpovídající dimenze a Lieova závorka je komutátor matic.

Tečné vektory z $\mathfrak{gl}$ jsou v souřadnicovém zápisu $X_i^j \partial_j^i|_e$ (standardní báze v GL). U maticových grup tak máme navíc operaci skládání prvků z $\mathfrak{gl}$ a dokonce můžeme i násobit prvky z $\mathfrak{gl}$ a GL. Ukáže se, že v praktických výpočtech si tím usnadníme dost práce oproti obecným Lieovým grupám a algebrám, kde takové operaco vůbec k dispozici nemáme.

Příklad 3. Afinní transformace $Af(1)$ na $\mathbb{R}$. $Af(1) = (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, (x,y)(\tilde{x},\tilde{y}) = (x\tilde{x}, x\tilde{y} + y))$. Tato struktura lze zapsat maticově (operace násobení matic) $Af(1) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), x \in \mathbb{R}_+, y \in \mathbb{R}\right\}$.

Lieova algebra se určí z požadavku na levoinvariantnost obecného vektorového pole v $e = (1,0)$, tj. uvažujeme pole ve tvaru $X|_e = \alpha\partial_x|_e + \beta\partial_y|_e$. Aplikováním tohoto požadavku

$$X|_{(a,b)} f = L_{(a,b)*}\, X|_{(1,0)} f = \left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right) f(ax, ay+b)|_{(x,y)=(1,0)} = a\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)|_{(a,b)} + \beta\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)|_{(a,b)}\right)$$

, zjistíme, že $X = \alpha x\partial_x + \beta x\partial_y$. Tedy Lieova algebra je $\mathfrak{af}(1) = \operatorname{span}\{X_1, X_2\}$, $X_1 = x\partial_x$, $X_2 = x\partial_y$, protože $[X_1, X_2] = X_2$ je $\mathfrak{af}(1)$ uzavřená a tedy je to skutečně algebra.

V případě matic máme $\mathfrak{af}(1) = T_e Af(1) \ni \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, takže $X_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ a $X_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Příklad 4. Maticové grupy.

Uvažme maticovou grupu $G \ni g$ (za souřadnice považujeme složky matice g^i_j). Podobně jako v minulém příkladě najdeme jak vypadá obecné levoinvariantní vektorové pole X, které je určeno hodnotou v e, tj. $X|_e = \alpha^i_j \partial^j_i|_e$, v obecném bodě $X|_g = X^i_j(g)\partial^j_i|_g$. Buď $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$, $f = f(x^i_j)$. Podmínka levoinvariance:

$$X^i_j(g)\partial^j_i|_g f = X|_g f = (L_{g*}X|_e)f = X|_e(f \circ L_g) = \alpha^m_l \partial^l_m f(g^i_k x^k_j) =$$
$$= \alpha^m_l \left.\frac{\partial f}{\partial x^o_p}\right|_g \frac{\partial(g^o_k x^k_p)}{\partial x^m_l} = \alpha^m_l g^o_k \left.\frac{\partial f}{\partial x^o_p}\right|_g \delta^k_m \delta^l_p = \alpha^k_j g^i_k \left.\frac{\partial f}{\partial x^i_j}\right|_g = g^i_k \alpha^k_j \partial^j_i|_g f.$$

Takže $X^i_j(g) = g^i_k \alpha^k_j$.