Kapitola 1

Volná částice

Cvičení 1 *Pomocí Fourierovy transformace určete řešení Schrödingerovy rovnice pro volnou částici, které v čase $t = 0$ má tvar*

$$\psi(\vec{x}, 0) = g(\vec{x}) = C \exp[-Ax^2 + \vec{B}\vec{x}] \tag{1.1}$$

kde Re $A > 0$, $\vec{B} \in \mathbb{C}^3$, $C \in \mathbb{C}$.

Návod: Při řešení používáme Fourierovu transformaci (FT) ve tvaru

$$\tilde{\psi}(\vec{p}, t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\hbar})^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}} \psi(\vec{x}, t) d^3x,$$

která převede Schrödingerovu rovnici na obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu v čase

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = \frac{p^2}{2M} \tilde{\psi}.$$

Řešení této rovnice je

$$\tilde{\psi}(\vec{p}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2M}t} \tilde{\psi}(\vec{p}, 0), \tag{1.2}$$

kde $\tilde{\psi}(\vec{p}, 0)$ je FT počáteční podmínky $\psi(\vec{x}, 0)$, tj.

$$\tilde{\psi}(\vec{p}, 0) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\hbar})^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}} \psi(\vec{x}, 0) d^3x = \frac{C}{(\sqrt{2A\hbar})^3} e^{\frac{(\vec{B}-\frac{i}{\hbar}\vec{p})^2}{4A}}$$

Řešení v proměnné $\vec{x}$ získáme inverzní FT

$$\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\hbar})^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}} \tilde{\psi}(\vec{p}, t) d^3p = C\chi(t)^{-3/2} e^{\frac{\vec{B}^2}{4A}} e^{-A\frac{[\vec{x}-\vec{B}/(2A)]^2}{\chi(t)}}, \tag{1.3}$$

kde $\chi(t) = 1 + \frac{2iA\hbar}{M}t$.

Cvičení 2 *Čemu je úměrná hustota pravděpodobnosti pro řešení (1.3) z příkladu 1? Jak se mění poloha jejího maxima s časem? Čemu je rovna její střední kvadratická odchylka? Jak se mění s časem? Za jak dlouho se zdvojnásobí "šířka"vlnového balíku pro elektron lokalisovaný s přesností 1 cm a pro částici s hmotností 1 gram, jejíž těžiště je lokalizováno s přesností* 10^{-6}*m?*

Návod: Je zapotřebí spočítat $|\psi(x,t)|^2 \sim \left| e^{-A\frac{[\vec{x}-\vec{B}/(2A)]^2}{\chi(t)}} \right|^2$ (nezajímá nás časový vývoj normalizace, i v dalším počítání je vhodné vynechávat celkové faktory nezávisející na x). Odvoďte si a využijte $|e^z|^2 = e^{2\mathrm{Re}z}$. Pro určení střední kvadratické odchylky atd. porovnejte výsledek s tvarem Gaussovy rozdělovací funkce a najdete

$$\begin{aligned}
\vec{x}_0(t) &= \frac{\mathrm{Re}\vec{B}}{2\mathrm{Re}A} + \frac{\hbar}{M}\mathrm{Im}\vec{B}\ t - \frac{\hbar}{M}\frac{\mathrm{Im}A}{\mathrm{Re}A}\mathrm{Re}\vec{B}\ t, \\
\sigma^2(t) &= \frac{1}{4\mathrm{Re}A} + \frac{\hbar^2}{M^2}\mathrm{Re}A\ t^2 + \frac{\hbar^2}{M^2}\frac{(\mathrm{Im}A)^2}{\mathrm{Re}A}\ t^2 - \frac{\hbar}{M}\frac{\mathrm{Im}A}{\mathrm{Re}A}\ t.
\end{aligned}$$

Neurčitost polohy je stejná ve všech směrech, tj. $(\Delta x_j) = \sigma(t)$. Vlnový balík se může po konečnou dobu zužovat, pokud je $\mathrm{Im}A \neq 0$. Pro $A > 0$ se pouze rozšiřuje, vztahy se zjednoduší na

$$\begin{aligned}
\vec{x}_0(t) &= \frac{\mathrm{Re}\vec{B}}{2A} + \frac{\hbar}{M}\mathrm{Im}\vec{B}\ t, \\
\sigma^2(t) &= \frac{1}{4A} + \frac{\hbar^2}{M^2}A\ t^2.
\end{aligned}$$

Zdvojnásobení: pro elektron cca 3 s, pro částici cca 10^{12} let.

Cvičení 3 *Částice s hmotností* m *a hybností* p *letí kolmo proti stěně se dvěma štěrbinami v bodech* $\pm x_0$*. Šířka štěrbin je* σ_0*. Ve vzdálenosti* d *od štěrbin je stínítko. Určete hustotu pravděpodobnosti nalezení částice na stínítku. Předpokládejte, že po průchodu horní, resp. spodní štěrbinou, je stav částice možné popsat vlnovým balíkem se střední hodnotou polohy* $\pm x_0$ *a střední kvadratickou odchylkou rovnou* σ_0*.*

Návod: Vlnová funkce popisující stav částice po průchodu štěrbinami je superpozicí vlnových balíků

$$\psi(x,t) = \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t), \quad \psi_{1,2}(x,t) = e^{-\frac{(x\mp x_0)^2}{4\sigma_0^2\chi(t)}} = e^{\frac{(x\mp x_0)^2(2\sigma_0^2 - i\frac{\hbar}{M}t)}{2(4\sigma_0^4+\frac{\hbar^2t^2}{M^2})}}.$$

Doba letu částice od štěrbin na stínítko je $t = \frac{dM}{p}$. Hustota pravděpodobnosti nalezení částice v místě x na stínítku je tedy rovna

$$\left|\psi(x, t = \frac{dM}{p})\right|^2 = |\psi_1(x) + \psi_2(x)|^2 = |\psi_1(x)|^2 + |\psi_2(x)|^2 + \psi_1(x)\overline{\psi_2}(x) + \overline{\psi_1}(x)\psi_2(x).$$

První dva členy odpovídají situaci jen s horní (resp. spodní) štěrbinou

$$|\psi_{1,2}(x)|^2 = e^{-\frac{(x\mp x_0)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma^2 = \sigma_0^2 + \left(\frac{\hbar d}{4p\sigma_0}\right)^2.$$

Zbylé dva členy jsou zodpovědné za interferenci

$$\psi_1(x)\overline{\psi_2}(x) + \overline{\psi_1}(x)\psi_2(x) = 2e^{-\frac{x^2+x_0^2}{2\sigma^2}} \cos\left(\frac{4\hbar dpxx_0}{4p^2\sigma_0^4 + \hbar^2 d^2}\right).$$