Kapitola 1

Spin

Cvičení 1 *Určete tvar matic operátorů projekce spinu do osy x, y, z v bázi společných vlastních vektorů $\hat{S}_z$ a $\hat{S}^2$ pro spin $\frac{1}{2}$.*

Návod: Spin je moment hybnosti. Společné vlastní vektory $\hat{S}_z$ a $\hat{S}^2$ jsou $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ a $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ splňující

$$\begin{aligned} \hat{S}_z|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle &= \pm\frac{\hbar}{2}|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle, \\ \hat{S}^2|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle &= \frac{3}{4}\hbar^2|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned}$$

$\hat{S}_z$ je v bázi svých vlastních vektorů reprezentováno diagonální maticí

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matice S_x a S_y určíme pomocí posunovacích operátorů

$$\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y,$$

jejichž působení na kety $|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$ známe (viz. příklad **??**). Matice posunovacích operátorů mají tvar

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_- = S_+^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud už snadno získáme matice operátorů $\hat{S}_x$ a $\hat{S}_y$. Výsledek lze zapsat ve tvaru

$$S_j = \frac{\hbar}{2}\sigma_j,$$

kde σ_j jsou Pauliho matice

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cvičení 2 *Ukažte explicitně, že* $S^2 = \frac{3}{4}\hbar^2\mathbb{1}$. *Porovnejte tento výsledek s* $\hat{L}^2$.

Návod: Pro výpočet je vhodné použít komutační a antikomutační relace pro Pauliho matice

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \qquad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{1},$$

ze kterých plyne vztah

$$\sigma_i\sigma_j = \frac{1}{2}\Big([\sigma_i, \sigma_j] + \{\sigma_i, \sigma_j\}\Big) = \delta_{ij}\mathbb{1} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k.$$

Porovnání s $\hat{L}^2$ - odpovídající l pro spin je $\frac{1}{2}$, tj. spin elektronu je poločíselný.

Cvičení 3 *Napište vlnovou funkci* $\Psi(\vec{x},)$ *základního stavu elektronu ve vodíku s hodnotou z–ové, resp. x–ové, resp. y–ové složky spinu rovné* $\hbar/2$.

Návod: Bez spinu je základní stav popsán vlnovou funkcí $\psi_1(r) = Ce^{-\frac{r}{a}}$. Protože $\hat{H}$ je ve spinovém prostoru diagonální, bude mít základní stav stejnou energii, jako když spin neuvažujeme, a odpovídající vlastní vektor má tvar $\Psi_{1,i}(r) = Ce^{-\frac{r}{a}}\,(a, b)^T$. Koeficienty a, b určíme tak, aby to byl současně vlastní vektor odpovídající složky spinu $\hat{S}_i$. Výsledek:

$$\Psi_{1,z+}(r) = Ce^{-\frac{r}{a}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \Psi_{1,x+}(r) = \frac{C}{\sqrt{2}}e^{-\frac{r}{a}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad \Psi_{1,y+}(r) = \frac{C}{\sqrt{2}}e^{-\frac{r}{a}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$$

Cvičení 4 *Jakým vektorem z* $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ *můžeme popsat spin elektronu, jestliže víme, že má kladnou (zápornou) projekci spinu do směru* $\vec{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$*?*

Návod: Hledáme vlastní vektory operátoru

$$\vec{n}\cdot\vec{\sigma} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi}\\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

s vlastními čísly ±1. Řešení je (včetně normalizace)

$$\psi_{\vec{n}+} = \begin{pmatrix}e^{-i\frac{\varphi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}\\ e^{i\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}, \quad \psi_{\vec{n}-} = \begin{pmatrix}e^{-i\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{\theta}{2}\\ -e^{i\frac{\varphi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}.$$

Cvičení 5 *Nechť pro volnou částici se spinem* $1/2$ *je naměřena hodnota z–ové složky spinu* $s_z = \hbar/2$. *Jestliže vzápětí měříme hodnotu spinu do směru* $\vec{n}$ *daného prostorovými úhly* θ, φ, *jaké můžeme naměřit hodnoty a s jakou pravděpodobností? Jaká je střední hodnota projekce spinu do směru* $\vec{n}$*?*

Návod: Stav spinu po měření do osy z je dán vektorem $\psi_{z+} = (1,0)^T$. Amplituda pravděpodobnosti naměření kladné (záporné) hodnoty projekce spinu do směru $\vec{n}$ je dána skalárním součinem ψ_{z+} s příslušným vlastním vektorem (viz. předchozí příklad). Pravděpodobnosti jsou nezávislé na úhlu φ, výsledek je

$$P_+ = \frac{1}{2}(1+\cos\theta), \qquad P_- = \frac{1}{2}(1-\cos\theta).$$

Střední hodnota je rovna

$$\langle \vec{n}\cdot\hat{\vec{S}}\rangle_{z+} = \frac{\hbar}{2}\cos\theta.$$

Cvičení 6 *Částice se spinem 1/2 je umístěna v konstantním magnetickém poli $\vec{B} = (0,0,B)$. V čase $t=0$ byla naměřena hodnota x-ové složka spinu částice $+\hbar/2$. Jakým vektorem bude popsán stav částice v čase $t>0$? S jakou pravděpodobností nalezneme v libovolném dalším čase hodnotu její x-ové složky spinu $+\hbar/2$ (resp. $-\hbar/2$)? Jak se s časem mění střední hodnota projekce spinu do osy x?*

Návod: Hamiltonián částice je roven

$$\hat{H} = \mu_0\vec{B}\cdot\vec{\sigma} = \mu_0 B\sigma_3.$$

Jeho vlastní čísla jsou $\pm\mu_0 B$, příslušné vlastní vektory $\psi_{z\pm}$.

Stav v čase $t>0$ je dán jako řešení Schrödingerovy rovnice

$$\hat{H}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

s počáteční podmínkou

$$\psi(t=0) = \psi_{x+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{z+}+\psi_{z-}).$$

V našem případě tak dostaneme (označíme $\omega = \frac{\mu_0 B}{\hbar}$)

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega t}\psi_{z+} + e^{i\omega t}\psi_{z-}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}e^{-i\omega t}\\ e^{i\omega t}\end{pmatrix}.$$

Pravděpodobnosti naměření kladné (záporné) projekce spinu do osy x v čase t jsou rovny

$$\begin{aligned} P_+ &= |(\psi_{x+},\psi(t))|^2 = \frac{1}{2}\left(1+\cos\left(2\omega t\right)\right), \\ P_- &= |(\psi_{x-},\psi(t))|^2 = \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(2\omega t\right)\right). \end{aligned}$$

Střední hodnota projekce spinu do osy x v čase t je

$$\langle\hat{S}_x\rangle(t) = \frac{\hbar}{2}(P_+ - P_-) = \frac{\hbar}{2}\cos(2\omega t).$$

Cvičení 7 *Ukažte, že pokud výraz* $\exp[i\vec{a}\cdot\vec{\sigma}]$ *definujeme pomocí řady*

$$\exp[i\vec{a}\cdot\vec{\sigma}] := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\vec{a}\cdot\vec{\sigma})^n}{n!},$$

pak platí

$$\exp[i\vec{a}\cdot\vec{\sigma}] = \cos(|\vec{a}|)\mathbb{1} + i\frac{\vec{a}\cdot\vec{\sigma}}{|\vec{a}|}\sin(|\vec{a}|).$$

Návod: Spočtěte nejprve $(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})^2$ a povšimněte si, že je to násobek jednotkové matice, pak sumu rozdělte na součet přes sudé a liché indexy.

Cvičení 8 *Částice se spinem* $1/2$ *je umístěna v konstantním magnetickém poli* $\vec{B} = (B, 0, 0)$. *V čase* $t = 0$ *byla naměřena hodnota její z-ové složky spinu* $+\hbar/2$. *S jakou pravděpodobností nalezneme v libovolném dalším čase hodnotu její y-ové složky spinu* $+\hbar/2$*? Jak se s časem mění střední hodnota projekce spinu do osy* z*?*

Návod: Počáteční stav spinu je popsán vektorem

$$\psi(t=0) = \psi_{z+} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

V čase $t > 0$ má řešení Pauliho rovnice v homogenním magnetickém poli tvar

$$\psi(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mu_0\vec{\sigma}\cdot\vec{B}t\right)\psi(0).$$

V našem případě dostaneme (označíme $\omega = \frac{\mu_0}{\hbar}B$)

$$\psi(t) = (\cos(\omega t)\mathbb{1} - i\sin(\omega t)\sigma_1)\,\psi(0) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -i\sin(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Amplituda pravděpodobnosti naměření kladné projekce spinu do osy y v čase t je dána skalárním součinem $\psi(t)$ a ψ_{y+}. Výsledná pravděpodobnost je rovna

$$P_{S_y=\frac{\hbar}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 - \sin\left(2\omega t\right)\right).$$

Střední hodnota projekce spinu do osy z v čase t je

$$\langle\hat{S}_z\rangle(t) = \frac{\hbar}{2}\psi^\dagger(t)\sigma_z\psi(t) = \frac{\hbar}{2}\cos(2\omega t).$$

Cvičení 9 *Najděte energie a vlnové funkce základního a prvního excitovaného stavu dvou nerozlišitelných částic se spinem 0, respektive 1/2, v poli isotropního harmonického oscilátoru.*

Návod:

- Spin 0:
  - základní stav - $E = 3\hbar\omega$, nedegenerovaný
  - 1. excitovaný stav - $E = 4\hbar\omega$, degenerace 3
- Spin 1/2:
  - základní stav - $E = 3\hbar\omega$, nedegenerovaný
  - 1. excitovaný stav - $E = 4\hbar\omega$, degenerace 12