1 Kvantování klasických polí

Tato, poslední, kapitola poznámek si klade za cíl stručné shrnutí látky z přednášky, ale je na místě poznamenat, že kvantováním polí se bude příští rok zabývat dvousemestrální předmět a tudíž zde není ani zdaleka možné projít všechny aspekty látky. Berte kapitolu jako přípravu na další rok. Z historických důvodů se tomuto postupu někdy říká *druhé kvantování*, kvantování polí je ale název věrnější.

1.1 Připomenutí: klasická teorie pole

Začneme stručným zopakováním základních vzorců a pouček klasické teorie pole v Lagrangeově a Hamiltonově formalismu.

Hustota lagrangiánu

Centrální význam lagrangiánu $L(q^1, \dots, q^s, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^s, t)$ v teorii pole přebírá *hustota lagrangiánu*

$$\mathscr{L}(\varphi^1, \dots, \varphi^s, \varphi^1_{,\mu}, \dots, \varphi^s_{,\mu}, x^\mu), \tag{1.1}$$

z níž můžeme určit $L = \int \mathscr{L} \mathrm{d}V$. V takto utvořeném lagrangiánu na místě obecných souřadnic vystupují *pole* $\varphi^i(x^\mu)$, typicky závisející na souřadnicích a čase, kompaktně dohromady zapsaných jako čtveřice prostoročasových souřadnic. V hustotě lagrangiánu se kromě obecných rychlostí $\dot{\varphi}^i := \varphi^i_{,t} := \partial_t \varphi^i$ může vyskytovat závislost i na derivacích φ^i podle x, y, z. Tomuto musejí být uzpůsobeny Euler-Lagrangeovy rovnice, které získávají tvar

$$\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi^i_{,\mu}} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi^i} = 0. \tag{1.2}$$

Derivace zcela vlevo se rozumí počítaná v soustavě souřadnic (x^μ), tedy φ^i apod. se v ní již neuvažují jako nezávislé proměnné lagrangiánu, ale jako funkce souřadnic a času. V soustavě jedné proměnné by se takto chovala úplná časová derivace.

Hustota hamiltoniánu

Teorii pole můžeme formulovat i v Hamiltonově formalismu. Na rozdíl od předchozího případu, nezávislého na volbě vztažné soustavy, v Hamiltonově formalismu získává časová souřadnice výhradní roli oproti prostorovým. Volíme tedy obecné hybnosti jako derivace podle časové změny φ^i,

$$\Pi_i = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi^i_{,t}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}^i}, \tag{1.3}$$

a Legendreovu transformaci provedeme též pouze v záměně $\dot{\varphi}^i \leftrightarrow \Pi_i$. Výsledkem je hamiltonián, který lze psát opět jako integrál $H = \int \mathscr{H} \mathrm{d}V$ z *hustoty hamiltoniánu*

$$\mathscr{H} = \Pi_i \dot{\varphi}^i - \mathscr{L} = \mathscr{H}(\varphi^1, \ldots, \varphi^s, \varphi^1_{,k}, \ldots, \varphi^s_{,k}, \Pi_1, \ldots, \Pi_s, x^i, t) \tag{1.4}$$

Věnujte pozornost nezávislým proměnným: obecná rychlost $\dot{\varphi}^i$ se nahradila obecnou hybností Π_i, ale ostatní (prostorové) derivace φ^i zůstávají! To má vliv na mnoho aspektů teorie. Zejména pohybové rovnice je třeba psát pomocí funkcionálních (či variačních) derivací[1]

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}^i(\vec{x}, t) &= \frac{\delta H}{\delta \Pi_i(\vec{x}, t)} = \frac{\partial \mathscr{H}(\vec{x}, t)}{\partial \Pi_i}, \\ \dot{\Pi}_i(\vec{x}, t) &= -\frac{\delta H}{\delta \varphi^i(\vec{x}, t)} = -\frac{\partial \mathscr{H}(\vec{x}, t)}{\partial \varphi^i} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \mathscr{H}(\vec{x}, t)}{\partial \varphi^i_{,k}}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

které berou ohled na možnost výskytu nezávislé polní proměnné i jejích derivací.

Poissonovy závorky

Podobným způsobem jako pohybové rovnice je potřeba upravit Poissonovy závorky. V každý okamžik můžeme vyhodnotit Poissonovu závorku dvou stavových funkcí jako

$$\{F, G\} = \int \mathrm{d}^3 x \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\delta F}{\delta \varphi^i(\vec{x}, t)} \frac{\delta G}{\delta \Pi_i(\vec{x}, t)} - \frac{\delta F}{\delta \Pi_i(\vec{x}, t)} \frac{\delta G}{\delta \varphi^i(\vec{x}, t)} \right). \tag{1.6}$$

Pohyb soustavy pak můžeme tradičně psát jako Poissonovu závorku s hamiltoniánem (ne hustotou). Poněkud je ale třeba upravit kanonické Poissonovy závorky: zejména nemůžeme používat samotné φ^i, Π_i, protože se nejedná o stavové funkce. Na skutečné trajektorii soustavy budou jak φ^i tak Π_i funkcemi souřadnic a času, a o stavových funkcích tak můžeme mluvit pouze po vyhodnocení těchto veličin v nějakých souřadnicích (ale stejném čase). Jejich Poissonova závorka vede na zobecněné funkce:

$$\{\varphi^i(\vec{x}, t), \Pi_j(\vec{y}, t)\} = \delta_{ij} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \tag{1.7}$$

1.2 Jak kvantovat klasická pole

Kvantování se standardně provádí podle návodu:

1. Uvažujte klasickou volnou (neinteragující) polní teorii danou hustotou lagrangiánu. (Interakce začleníme později.)

2. Nalezněte řešení pohybových rovnic z Lagrangeova formalismu ve formě superpozice rovinných vln.

[1] Jak jsme je zavedli v kapitole **??**.

3. Vyjádřete amplitudy rovinných vln $a^i(\vec{k})$ a jejich komplexní sdružení pomocí polí a jejich kanonických hybností (1.3), pro které klasicky postulujeme Poissonovy závorky (1.7).

4. Přeškálujte veličiny $a^i(\vec{k})$, aby platilo

$$i\hbar\{a^i(\vec{k}), \overline{a}^j(\vec{k}')\} = \delta_{ij}\delta^3(\vec{k}-\vec{k}'). \tag{1.8}$$

5. Zaveďte $\mathscr{H} = \Pi_i\dot{\varphi}^i - \mathscr{L}$, z něj spočítejte $H = \int \mathrm{d}^3x\mathscr{H}$ a ověřte, že

$$H = \sum_i \int \mathrm{d}^3k E(i,\vec{k})\overline{a}^i(\vec{k})a^i(\vec{k}) \tag{1.9}$$

je součtem energií uvažované superpozice rovinných vln.

6. Kvantujte použitím principu korespondence

$$\begin{aligned} \{F,G\} &\mapsto \frac{1}{i\hbar}[\hat{F},\hat{G}], \\ \varphi^i(\vec{x},t), \Pi_i(\vec{x},t) &\mapsto \hat{\varphi}_i(\vec{x},t), \hat{\Pi}_i(\vec{x},t) \\ a^i(\vec{k}), \overline{a}^i(\vec{k}) &\mapsto \hat{a}_{i,\vec{k}}, \hat{a}^\dagger_{i,\vec{k}'} \\ H &\mapsto \hat{H} = \sum_i \int \mathrm{d}^3k E(i,\vec{k})\hat{a}^\dagger_{i,\vec{k}}\hat{a}_{i,\vec{k}}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Odsud okamžitě plyne $[\hat{a}_{i,\vec{k}}, \hat{a}^\dagger_{j,\vec{k}'}] = \delta_{ij}\delta^3(\vec{k}-\vec{k}')$, jak má platit pro spojité bosonové kreační a anihilační operátory. Všimněte si, že hamiltonián se přepisuje v „normálním uspořádání“. Počítat jej přímo náhradou φ, Π za operátory ve vzorci pro $\mathscr{H}$ by vedlo k zákeřným nekonečnům, která se pak musejí složitě odstraňovat.

7. Postulujte existenci a jedinečnost normalizovaného stavu s nejnižší energií, *vakua* $|0\rangle$, splňujícího (**??**). Fockův prostor pak generujeme působením operátorů $\hat{a}^\dagger_\alpha$ na $|0\rangle$. Takto získané stavy $(\hat{a}^\dagger_{\alpha_1}\ldots\hat{a}^\dagger_{\alpha_n}|0\rangle)$ interpretujeme jako stavy obsahující n kvant pole φ. Tyto stavy pak mají energii/hybnost danou jako součet energií/hybností stavů $\hat{a}^\dagger_{\alpha_k}|0\rangle$, proto stav $\hat{a}^\dagger_\alpha|0\rangle$ interpretujeme jako částici pole φ, např. foton, ve stavu $|\alpha\rangle$ a obecně stav $\hat{a}^\dagger_{\alpha_1}\ldots\hat{a}^\dagger_{\alpha_n}|0\rangle$ jako n-částicový stav.

8. Interakční členy v klasickém $\mathscr{L}$ vyjádřete také pomocí $\hat{a}_{i,\vec{k}}, \hat{a}^\dagger_{i,\vec{k}}$ a započítejte je poruchově.

1.2.1 Volné reálné Klein-Gordonovo pole ($c = 1, \hbar = 1$)

Příklad uvedeme na tzv. reálném skalárním poli,[2] daném lorentzovsky invariantní hustotou lagrangiánu

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} - \frac{1}{2}m^2\varphi^2, \tag{1.11}$$

kde $(x^\mu) = (t, x, y, z)$. Napíšeme pohybové rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{,\kappa}} &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\delta^\kappa_\mu\varphi_{,\nu} + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\delta^\kappa_\nu = \eta^{\kappa\nu}\varphi_{,\nu}, \\ 0 = \partial_\kappa\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{,\kappa}} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi} &= \partial_\kappa(\eta^{\kappa\nu}\varphi_{,\nu}) + m^2\varphi = \eta^{\mu\nu}\varphi_{,\nu\mu} + m^2\varphi = \Box\varphi + m^2\varphi, \end{aligned} \tag{1.12}$$

kde jsme použili d'Alembertova operátoru $\Box$. Než rovnice začneme řešit, připravíme si ještě rovnou obecnou hybnost volbou $\kappa = 0$ v první z rovnic:

$$\Pi = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\varphi_{,0}} = \eta^{0\nu}\varphi_{,\nu} = \dot{\varphi}. \tag{1.13}$$

Rovnice (1.12), známá jako rovnice Klein–Gordonova, má nekonečně mnoho řešení tvaru rovinné vlny

$$\varphi_{\vec{k}}(\vec{x}, t) = e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega(\vec{k})t\right)}. \tag{1.14}$$

Dosazení do (1.12) dá podmínku

$$\omega(\vec{k})^2 = \vec{k}^2 + m^2. \tag{1.15}$$

Obecné řešení pohybových rovnic s požadavkem na reálnost φ tedy je

$$\varphi(\vec{x}, t) = \int \mathrm{d}^3k \left(a(\vec{k})e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega(\vec{k})t)} + \overline{a}(\vec{k})e^{-i(\vec{k}\vec{x} - \omega(\vec{k})t)}\right), \tag{1.16}$$

kde

$$\omega(\vec{k}) = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}. \tag{1.17}$$

Řešení rovnic dosadíme do připravené obecné hybnosti

$$\Pi(\vec{x}) = \dot{\varphi} = -i\int \mathrm{d}^3k\omega(\vec{k}) \left(a(\vec{k})e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega(\vec{k})t)} - \overline{a}(\vec{k})e^{-i(\vec{k}\vec{x} - \omega(\vec{k})t)}\right). \tag{1.18}$$

Při hledání vyjádření $a, \overline{a}$ pomocí φ, Π zkusíme zpětnou Fourierovu transformaci

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3x e^{-i(\vec{k}\vec{x} - \omega(\vec{k})t)}\varphi(\vec{x}, t) = \ldots = a(\vec{k}) + \overline{a}(-\vec{k})e^{2i\omega(-\vec{k})t}. \tag{1.19}$$

[2] Takový popis se přiřazuje Higgsovu bosonu.

Nadbytečného výrazu s $\overline{a}$ se zbavíme transformací Π, kde vystoupí tytéž dva členy se vzájemně opačnými znaménky:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3x e^{-i(\vec{k}\vec{x}-\omega(\vec{k})t)}\Pi(\vec{x},t) = \ldots = -i\omega(\vec{k})a(\vec{k}) + i\omega(-\vec{k})\overline{a}(-\vec{k})e^{2i\omega(-\vec{k})t}. \quad (1.20)$$

Celkově tedy

$$a(\vec{k}) = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3x \left(\varphi(\vec{x},t) + \frac{i}{\omega(\vec{k})}\Pi(\vec{x},t)\right) e^{-i(\vec{k}\vec{x}-\omega(\vec{k})t)} \quad (1.21)$$

a jeho komplexní sdružení

$$\overline{a}(\vec{k}) = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3x \left(\varphi(\vec{x},t) - \frac{i}{\omega(\vec{k})}\Pi(\vec{x},t)\right) e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega(\vec{k})t)}. \quad (1.22)$$

S touto volbou škály by vycházelo

$$\begin{aligned}
\{a(\vec{k}),\overline{a}(\vec{k}')\} &= \frac{1}{4(2\pi)^6}\int \mathrm{d}^3x \int \mathrm{d}^3y e^{-i(\vec{k}\vec{x}-\omega(\vec{k})t)} e^{i(\vec{k}'\vec{y}-\omega(\vec{k}')t)} \times \\
&\quad \times \left\{\varphi(\vec{x},t) + \frac{i}{\omega(\vec{k})}\Pi(\vec{x},t), \varphi(\vec{y},t) - \frac{i}{\omega(\vec{k}')}\Pi(\vec{y},t)\right\} = \\
&= \frac{1}{4(2\pi)^6}\int \mathrm{d}^3x \int \mathrm{d}^3y e^{-i(\vec{k}\vec{x}-\omega(\vec{k})t)} e^{i(\vec{k}'\vec{y}-\omega(\vec{k}')t)} \times \\
&\quad \times \left(-\frac{i}{\omega(\vec{k}')} - \frac{i}{\omega(\vec{k})}\right)\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) = \\
&= \frac{-i}{2(2\pi)^3\omega(\vec{k})}\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')
\end{aligned} \quad (1.23)$$

namísto požadovaného $-i\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}')$, upravíme proto definice $a(\vec{k})$ a $\overline{a}(\vec{k})$ opravným faktorem $\sqrt{2(2\pi)^3\omega(\vec{k})}$ na

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(\vec{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3\omega(\vec{k})}}\int \mathrm{d}^3\, x e^{-i\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega(\vec{k})t\right)}\left[\omega(\vec{k})\varphi(\vec{x},t) + i\Pi(\vec{x},t)\right], \\
\overline{\tilde{a}}(\vec{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3\omega(\vec{k})}}\int \mathrm{d}^3x\, e^{+i\left(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega(\vec{k})t\right)}\left[\omega(\vec{k})\varphi(\vec{x},t) - i\Pi(\vec{x},t)\right], \\
\varphi(\vec{x},t) &= \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3\omega(\vec{k})}}\int \mathrm{d}^3k \left(\tilde{a}(\vec{k})e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega(\vec{k})t)} + \overline{\tilde{a}}(\vec{k})e^{-i(\vec{k}\vec{x}-\omega(\vec{k})t)}\right), \\
\Pi(\vec{x}) &= \frac{-i\sqrt{\omega(\vec{k})}}{\sqrt{2(2\pi)^3}}\int \mathrm{d}^3k \left(\tilde{a}(\vec{k})e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega(\vec{k})t)} - \overline{\tilde{a}}(\vec{k})e^{-i(\vec{k}\vec{x}-\omega(\vec{k})t)}\right).
\end{aligned} \quad (1.24)$$

Kvantujme!

$$\begin{aligned}\left[\hat{\varphi}(\vec{x},t),\hat{\Pi}(\vec{x},t)\right] &= i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}), &(1.25)\\ \left[\hat{\varphi}(\vec{x},t),\hat{\varphi}(\vec{x},t)\right] &= 0, &(1.26)\\ \left[\hat{\Pi}(\vec{x},t),\hat{\Pi}(\vec{x},t)\right] &= 0. &(1.27)\end{aligned}$$

Přímým dosazením a použitím postulovaných komutačních relací pro $\hat{\Pi}$ a $\hat{\varphi}$ by se ukázalo, že pak skutečně také

$$\begin{aligned}\left[\hat{a}_{\vec{k}},\hat{a}^\dagger_{\vec{l}}\right] &= \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{l}),\\ \left[\hat{a}_{\vec{k}},\hat{a}_{\vec{l}}\right] &= 0,\\ \left[\hat{a}^\dagger_{\vec{k}},\hat{a}^\dagger_{\vec{l}}\right] &= 0,\end{aligned} \qquad (1.28)$$

jak má být.

Pokusme se nyní sestavit hamiltonián volného Klein–Gordonova pole přímým výpočtem s „ostříškovanými“ členy:[3]

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \int \mathscr{H}\,\mathrm{d}^3x = \int \left(\hat{\Pi}\dot{\hat{\varphi}} - \mathscr{L}\right)\mathrm{d}^3x\\
&= \frac{1}{2}\int \left(\hat{\Pi}^2 + (\operatorname{grad}\hat{\varphi})^2 + m^2\hat{\varphi}^2\right)\mathrm{d}^3x\\
&= \frac{1}{4(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3x \int \mathrm{d}^3k \int \mathrm{d}^3k' \frac{1}{\sqrt{\omega\omega'}}\times\\
&\quad\Big(-\omega\omega'\left(\hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}'}e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{x}-i(\omega+\omega')t} - \hat{a}_{\vec{k}}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}\,e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\vec{x}+i(\omega-\omega')t} - \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\,\hat{a}_{\vec{k}'}e^{\cdots} + \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}\,e^{\cdots}\right)\\
&\quad - \vec{k}\cdot\vec{k}'\left(\hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}'}e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{x}-i(\omega+\omega')t} - \hat{a}_{\vec{k}}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}\,e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\vec{x}+i(\omega-\omega')t} - \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\,\hat{a}_{\vec{k}'}e^{\cdots} + \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}\,e^{\cdots}\right)\\
&\quad + m^2\left(\hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}'}e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{x}-i(\omega+\omega')t} + \hat{a}_{\vec{k}}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}\,e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\vec{x}+i(\omega-\omega')t} - \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\,\hat{a}_{\vec{k}'}e^{\cdots} + \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}\,e^{\cdots}\right)\Big)\\
&= \int \mathrm{d}^3k \int \mathrm{d}^3k' \frac{1}{4\sqrt{\omega\omega'}}\times\\
&\quad\Big(-\omega\omega'\left(\hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}'}\delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{k}') - \hat{a}_{\vec{k}}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}\,\delta^{(3)}(\vec{k}'-\vec{k}) - \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\,\hat{a}_{\vec{k}'}\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}') + \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}\,\delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{k}')\right)\\
&\quad - \vec{k}\cdot\vec{k}'\left(\hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}'}\delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{k}') - \hat{a}_{\vec{k}}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}\,\delta^{(3)}(\vec{k}'-\vec{k}) - \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\,\hat{a}_{\vec{k}'}\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}') + \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}\,\delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{k}')\right)\\
&\quad + m^2\left(\hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}'}\delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{k}') + \hat{a}_{\vec{k}}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}\,\delta^{(3)}(\vec{k}'-\vec{k}) - \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\,\hat{a}_{\vec{k}'}\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}') + \hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{k}'}\,\delta^{(3)}(\vec{k}+\vec{k}')\right)\Big)\\
&= \int \mathrm{d}^3k \frac{1}{4\omega}\left(\underbrace{\left(-\omega^2+|\vec{k}|^2+m^2\right)}_{0}\left(\hat{a}^2_{\vec{k}} + (\hat{a}^\dagger_{\vec{k}})^2\right) + \underbrace{\left(\omega^2+|\vec{k}|^2+m^2\right)}_{2\omega^2}\left(\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\,\hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\right)\right)\\
&= \int \mathrm{d}^3k\,\omega(\vec{k})\frac{\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\,\hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}_{\vec{k}}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}}{2}\end{aligned} \qquad (1.29)$$

[3] Pro stručnost $\omega' := \omega(\vec{k}')$.

Vzorec vyšel ve smíšeném uspořádání kreačních a anihilačních operátorů. Pokus převést jej na normální uspořádání $\hat{a}^\dagger\,\hat{a}$ padne na skutečnosti, že bychom potřebovali komutátor $\hat{a}^\dagger$ a $\hat{a}$ se *stejným* $\vec{k}$, který je podle (1.28) úměrný $\delta(0)$! Protože tento člen v teorii harmonického oscilátoru udává hladinu nulové energie, naše pole by mělo nekonečnou energii už ve vakuovém stavu.

Budeme se proto držet naší kuchařky a hamiltonián sestavíme s vynuceným normálním uspořádáním

$$\hat{H} = \int \mathrm{d}^3k\,\omega(\vec{k})\,\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\,\hat{a}_{\vec{k}}. \tag{1.30}$$

Tento postup dává dobré výsledky.

Podobně by se odvodil vztah pro hybnost $\hat{\vec{P}}$

$$\hat{\vec{P}} = \int \mathrm{d}^3k\,\vec{k}\,\hat{a}^\dagger_{\vec{k}}\,\hat{a}_{\vec{k}}. \tag{1.31}$$

1.3 Kvantování elektromagnetického pole

Analogií ukázaného postupu zkusíme nakvantovat elektromagnetické pole, jehož jednotlivé excitace jsou fotony. Spočítáme také v nejhrubší aproximaci jeho interakci s elektronem.

Budeme se opět držet kuchařky, ovšem el.-mag. pole má tu nevýhodu na výpočet, že je kalibračně invariantní, jeho invariance vzhledem k volbě kalibrace se nesmí objevit jako nezávislé pole s hybnostmi ve výsledku.[4] Tahle obtíž se dá řešit různě, my zvolíme kalibraci fixně a potom budeme kvantovat. Tento postup je jednoduchý a funguje dobře, je však nevhodný pro práci v teorii elementárních částic, kvantové chromodynamice apod.

Připomeneme, že hustota lagrangiánu elektromagnetického pole je

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{1.32}$$

kde[5]

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{1.33}$$

a dává pro pole A_μ pohybové rovnice

$$\partial_\mu\partial^\mu A_\nu - \partial_\nu\left(\partial^\mu A_\mu\right) = 0. \tag{1.34}$$

Obecné hybnosti jsou (až na konstantní faktor) složky elektrické intenzity:

$$\begin{aligned}\Pi_i = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_{i,t}} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_{i,0}} = \frac{1}{c\mu_0}(A_{i,0} - A_{0,i}) = \frac{1}{\mu_0 c}(-\frac{1}{c}A^i_{,t} - A^0_{,i}) = \\ = \frac{1}{\mu_0 c^2}\left(-\frac{\partial A^i}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right) = \varepsilon_0 E^i.\end{aligned} \tag{1.35}$$

[4] Kalibrační invariance například to znemožňuje přechod k hamiltonovské formulaci, protože obecné hybnosti ve „směrech“ odpovídajících těmto stupňům volnosti by vyšly nulové.

[5] $A_\mu = (\frac{\varphi}{c}, -\vec{A})$

Fixní kalibraci zvolíme Coulombovu, danou vzorci

$$\varphi = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \tag{1.36}$$

Je třeba zdůraznit, že tyto rovnice nejsou invariantní vůči Lorentzově transformaci: závisí na volbě směru časové osy. Dá se postupovat i volbou (slabší) Lorentzovy kalibrace, ale ta problém řeší jen částečně a je pak potřeba dalších kroků.

V rovnici (1.34) tak zmizí druhý člen a zbude rovnice pro netriviální složky (tří)-vektoru $\vec{A}$:

$$\Box \vec{A} = 0. \tag{1.37}$$

Řešení v podobě *polarizovaných* rovinných vln

$$\vec{A}_{\vec{k}}(\vec{x}, t) = \vec{\epsilon} e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega(\vec{k})t)}, \tag{1.38}$$

musí splňovat

$$\begin{aligned} \omega^2(\vec{k}) - |\vec{k}|^2 &= 0, \\ \omega(\vec{k}) &= |\vec{k}| \end{aligned}$$

a vazbu na směr polarizace $\vec{\epsilon}$ udává kalibrační podmínka

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{\epsilon} = 0. \tag{1.39}$$

To má pro každé nenulové $\vec{k}$ dvě lineárně nezávislá řešení.

Obecné (reálné) řešení v podobě kombinace rovinných vln se dvěma možnými polarizacemi tak vypadá[6]

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{\lambda=1}^{2} \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega(\vec{k})\varepsilon_0}} \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \left(a(\vec{k}, \lambda) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega(\vec{k})t)} + \overline{a(\vec{k}, \lambda)} e^{-i(\vec{k}\vec{x} - \omega(\vec{k})t)} \right), \tag{1.40}$$

kde stále

$$\begin{aligned} \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \cdot \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda') &= \delta_{\lambda\lambda'} \\ \vec{k} \cdot \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) &= 0, \end{aligned} \tag{1.41}$$

a obecná hybnost

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}(\vec{x}, t) = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \sum_{\lambda=1}^{2} \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{\hbar\varepsilon_0}{2\omega(\vec{k})}} \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \times \\ \times \left(-i\omega(\vec{k}) a(\vec{k}, \lambda) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega(\vec{k})t)} + i\omega(\vec{k}) \overline{a(\vec{k}, \lambda)} e^{-i(\vec{k}\vec{x} - \omega(\vec{k})t)} \right), \end{aligned} \tag{1.42}$$

[6] Zahrnuli jsme již správný faktor k amplitudě a.

Hustota hamiltoniánu pak vyjádřená pomocí a vychází

$$\begin{aligned}\mathscr{H} &= \Pi^i A_{i,t} - \mathscr{L} = \frac{1}{2\varepsilon_0}(\Pi^i)^2 + \frac{1}{4\mu_0}(A_{i,j} - A_{j,i})^2 \qquad \left(= \frac{\varepsilon_0}{2}|\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|\vec{B}|^2\right) \\ &= \ldots = \sum_{\lambda=1}^{2} \int \mathrm{d}^3k\, \hbar\omega(\vec{k}) a(\vec{k},\lambda)\overline{a(\vec{k},\lambda)}.\end{aligned} \tag{1.43}$$

Kvantování kalibračně invariantní teorie přináší dvě další překvapení: dokud nemáme Hamiltonův formalizmus, nemáme ani Poissonovy závorky. Fixní kalibrace, pokud je dostupná, tento problém řeší, ale naopak se může stát, že kalibrační vzorce jsou ve formě holonomních vazeb (jak je tomu v případě Coulombovy kalibrace) a musíme pak zavádět obecné souřadnice.[7]

My se tedy vydáme cestou nejmenšího odporu a místo komutátorů souřadnic a hybností postulujeme rovnou komutátory kreačních a anihilačních operátorů

$$\left[\hat{a}_{\vec{k},\lambda}, \hat{a}^\dagger_{\vec{k}',\lambda'}\right] = \delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'). \tag{1.44}$$

Složky souřadnic $\vec{A}(\vec{x},t)$ a hybností $\vec{\Pi}(\vec{x},t)$ vyjádřených pomocí těchto operátorů pak komutují jako

$$\begin{aligned}&\left[A_i(\vec{x},t), \Pi_j(\vec{y},t)\right] = \\ &= \sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\lambda'=1}^{2} \int \mathrm{d}^3k \int \mathrm{d}^3k' \frac{-i\hbar\omega(\vec{k}')}{2(2\pi)^3\sqrt{\omega(\vec{k})\omega(\vec{k}')}} \epsilon_i(\vec{k},\lambda)\epsilon_j(\vec{k}',\lambda') \times \\ &\quad \times \left[\hat{a}_{\vec{k},\lambda} e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega(\vec{k})t)} + \hat{a}^\dagger_{\vec{k},\lambda}\, e^{-i(\vec{k}\vec{x} - \omega(\vec{k})t)}, \hat{a}_{\vec{k}',\lambda'} e^{i(\vec{k}'\vec{y} - \omega(\vec{k}')t)} - \hat{a}^\dagger_{\vec{k}',\lambda'}\, e^{-i(\vec{k}'\vec{y} - \omega(\vec{k}')t)}\right] \\ &= \sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\lambda'=1}^{2} \int \mathrm{d}^3k \int \mathrm{d}^3k' \frac{-i\hbar\omega(\vec{k}')}{2(2\pi)^3\sqrt{\omega(\vec{k})\omega(\vec{k}')}} \epsilon_i(\vec{k},\lambda)\epsilon_j(\vec{k}',\lambda') \times \\ &\quad \times \left(-e^{i\vec{k}\vec{x} - i\vec{k}'\vec{y} - i(\omega(\vec{k}) - \omega(\vec{k}'))t}\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') - e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\vec{k}'\vec{y} + i(\omega(\vec{k}) - \omega(\vec{k}'))t}\delta_{\lambda\lambda'}\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}')\right) \\ &= \sum_{\lambda=1}^{2} \int \mathrm{d}^3k \frac{i\hbar}{2(2\pi)^3} \underbrace{\epsilon_i(\vec{k},\lambda)\epsilon_j(\vec{k},\lambda)}_{P_{ij}(\vec{k})} \left(e^{i\vec{k}(\vec{x} - \vec{y})} + e^{i\vec{k}(\vec{y} - \vec{x})}\right)\end{aligned} \tag{1.45}$$

Pokud by nyní na místě $P_{ij}(\vec{k})$ vystupovalo δ_{ij} (jak by se stalo, kdyby pro dané $\vec{k}$ vektory $\vec{e}(\vec{k},\lambda)$ byly tři a tvořily ON bázi), výraz by se zjednodušil na kanonický komutátor $i\hbar\delta_{ij}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$. Projektoru $P(\vec{k})$ ale „chybí“ vektor ve směru $\vec{k}$, platí pro něj

$$P_{ij}(\vec{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|k|^2} \tag{1.46}$$

[7] V nich pak je možno vyjádřit Poissonovy závorky *původních* souřadnic a hybností jakožto stavových funkcí.

a jeho Fourierův obraz je namísto delta funkce takzvaná *transverzální* delta funkce

$$\delta^{\mathrm{tr}}_{ij}(\vec{x}-\vec{y}) = \delta_{ij}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) + \partial_i\partial_j \frac{1}{4\pi\,|\vec{x}-\vec{y}|}. \tag{1.47}$$

S tímto označením platí

$$\left[A_i(\vec{x},t), \Pi_j(\vec{y},t)\right] = i\hbar\delta^{\mathrm{tr}}_{ij}(\vec{x}-\vec{y}). \tag{1.48}$$

Jedná se o důsledek vazby, kterou jsme mezi souřadnice zavedli volbou Coulombovy kalibrace.[8]

1.3.1 Interakce elektromagnetického pole s látkou

Nyní už máme všechno připraveno na poslední krok kuchařky, výpočet interakce fotonů s částicemi. Hamiltonián nabité částice v el.-mag. poli jsme samozřejmě uměli sestavit již dávno, tam ale potenciál vystupoval jako externí proměnná a nemohli jsme tak zachytit reakci pole na pohyb částice, jen jednosměrnou akci Lorentzovy síly. Nový popis nám tak umožní kvantově popsat vztah mezi urychlováním nabitých částic v poli a pohlcováním či vyzařováním energie ve formě fotonů. Budeme uvažovat elektron, tedy $q = -e$.

Hilbertův prostor našeho systému bude dán tenzorovým součinem Hilbertova prostoru volného hmotného bodu a Fockova prostoru elektromagnetického pole. Celkový hamiltonián pak napíšeme do formalismu předchozích kapitol jako součet tří členů

$$\begin{aligned} \hat{H} = {} & \frac{\hat{\vec{P}}^2}{2m} && (\hat{H}_{\text{částice}}) \\ & + \frac{e}{2m}\{\hat{\vec{P}}, \hat{\vec{A}}\} + \frac{e^2}{2m}\hat{\vec{A}}\hat{\vec{A}} - e\hat{\varphi} && (\hat{H}_{\text{int}}) \\ & + \sum_{\lambda=1}^{2}\int \mathrm{d}^3k\,\hbar\omega(\vec{k})\,\hat{a}^\dagger_{\vec{k},\lambda}\,\hat{a}_{\vec{k},\lambda} && (\hat{H}_{\text{pole}}) \end{aligned} \tag{1.49}$$

kde za $\hat{A}_i$ je ještě potřeba dosadit z (1.40), v operátorové verzi a s polohou vyjádřenou $\hat{\vec{X}}$. Tento hamiltonián jsme dostali přímo roznásobením známého

$$H = \frac{(\vec{P}-q\vec{A})^2}{2m} + q\varphi + \int \mathrm{d}^3x \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2(\vec{x}) + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2(\vec{x})\right) \tag{1.50}$$

a dosazením kvantových verzí všech zúčastněných veličin. (Ve Schrödingerově obraze volíme $t = 0$, tedy

$$\hat{\vec{A}}(\hat{\vec{X}}) = \sum_{\lambda=1}^{2}\int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega(\vec{k})\varepsilon_0}}\vec{\epsilon}(\vec{k},\lambda)\left(\hat{a}_{\vec{k},\lambda}e^{i\vec{k}\hat{\vec{X}}} + \hat{a}^\dagger_{\vec{k},\lambda}\,e^{-i\vec{k}\hat{\vec{X}}}\right), \tag{1.51}$$

[8] Výsledek (1.48) lze získat i zcela klasicky ve formě Poissonových závorek a odsud pak odvodit (1.44). Potřebujete k tomu však teorii, kterou jste neprobírali.

o správnou hodnotu v čase t by se postaral vývoj operátoru podle (**??**).)

Hamiltonián $\hat{H}_{\text{částice}}$ popisuje pohyb volné částice a $\hat{H}_{\text{pole}}$ nerušený časový vývoj pole, oba umíme dobře počítat. Dohromady je označíme $\hat{H}_0$ a zbývající člen $\hat{H}_{\text{int}}$ budeme uvažovat jako poruchu tohoto volného hamiltoniánu. To je oprávněné, pokud $|eA| \ll |P|$. V prvním řádu pak můžeme zahodit druhý člen $\hat{H}_{\text{int}}$ a rovněž rovnou škrtneme třetí, protože ve zvolené kalibraci je φ nulové. Za parametr poruchy pro poruchový rozvoj můžeme vzít kupříkladu e.

Z nestacionární poruchové teorie pro časově nezávislou poruchu známe vztah (**??**). Pro naše účely uvažujme, stejně jako při jeho odvození, počáteční i koncový stav jako vlastní stavy $\hat{H}_0$, nechť ovšem navíc jsou tenzorovými součiny nějakých vlastních stavů $\hat{H}_{\text{částice}}$ a $\hat{H}_{\text{pole}}$. Pro pravděpodobnost přechodu tedy platí

$$W_{|i_č,i_p\rangle\to|f_č,f_p\rangle}(T) = \frac{1}{\hbar^2}\left|\langle f_č, f_p|\hat{H}_{\text{int}}|i_č, i_p\rangle\right|^2 I_T\left(\frac{E_f - E_i}{\hbar}\right), \tag{1.52}$$

kde

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{e}{2m}(\hat{\vec{P}}\hat{\vec{A}}(\hat{\vec{X}}) + \hat{\vec{A}}(\hat{\vec{X}})\hat{\vec{P}}). \tag{1.53}$$

a $E_{i,f}$ značí celkové energie (vlastní hodnoty $\hat{H}_0$) počátečního a koncového stavu. Funkce I_T, jak víme z páté kapitoly, je zodpovědná za potlačení pravděpodobnosti přechodu pro velké rozdíly energií, a popisuje tak (přibližné) zachování celkové energie při interakci. Pro delší časy T se energie zachovává přesněji. Věnujme se nyní hlavně skalárnímu součinu vystupujícímu před ní.

Následující odvození se provede nejsnadněji, nahradíme-li $\hat{\vec{A}}$ jeho diskrétní verzí, která umožňuje jen diskrétní hodnoty vektoru $\vec{k}$. Toho se dosáhne tak, uvažujeme-li místo prostoru $\mathbb{R}^3$ jen krychle o straně a (s periodickými okrajovými podmínkami). V takovém omezeném prostoru jsou rovinné postupné vlny umožněny jen s vektory

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{a}(n_1, n_2, n_3), \quad n_j \in \mathbb{Z}. \tag{1.54}$$

Kvantování pak dá namísto (1.51)[9]

$$\hat{\vec{A}}(\hat{\vec{X}}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\vec{k}}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega(\vec{k})\varepsilon_0}}\vec{\epsilon}(\vec{k},\lambda)\left(\hat{a}_{\vec{k},\lambda}\,e^{i\vec{k}\hat{\vec{X}}} + \hat{a}^\dagger_{\vec{k},\lambda}\,e^{-i\vec{k}\hat{\vec{X}}}\right), \tag{1.55}$$

kde kreační a anihilační operátory nyní mají diskrétní stupně volnosti, tedy

$$\left[\hat{a}_{\vec{k}_j,\lambda}, \hat{a}^\dagger_{\vec{k}_l,\lambda'}\right] = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{jl} \tag{1.56}$$

a volný hamiltonián vychází

$$\hat{H} = \sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\vec{k}}\hbar\omega(\vec{k})\,\hat{a}^\dagger_{\vec{k},\lambda}\,\hat{a}_{\vec{k},\lambda}. \tag{1.57}$$

[9] Zkuste si to!

Pro dostatečně velké a se stírají rozdíly mezi takto popsaným polem a původním, nediskretizovaným, elektromagnetickému poli. Detailům limitního přechodu se zde nebudeme věnovat, zaujatý čtenář je najde ve **[?]**.

Toto přiblížení má výhodu, že v něm máme elegantní vyjádření vlastních stavů $\hat{H}_{\text{pole}}$ – přes obsazovací čísla jednotlivých kombinací $(\vec{k}, \lambda)$:

$$|i_{\text{pole}}\rangle = |n_1, n_2, \ldots\rangle =: \prod_j \frac{\left(\hat{a}^\dagger_{\vec{k}_j,\lambda_j}\right)^{n_j}}{\sqrt{n_j!}}|vac\rangle \tag{1.58}$$

Provedeme ještě jedno přiblížení, takzvanou *dipólovou aproximaci*. Ta předpokládá, že typická vlnová délka pole je mnohem větší než měřítko polohy částice – jinými slovy, že uvažujeme vlny tak dlouhé, že pohyb částice, na kterou působí, je ve srovnání s jejich vlnovou délkou zanedbatelný. V tom případě můžeme přestat psát x-závislost vektorového potenciálu, což nepochybně všechny úvahy výrazně zjednoduší:

$$\hat{\vec{A}} \approx \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\lambda=1}^{2} \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega(\vec{k})\varepsilon_0}} \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda)(\hat{a}_{\vec{k},\lambda} + \hat{a}^\dagger_{\vec{k},\lambda}) \tag{1.59}$$

Přinejmenším v (1.53) poté operátory $\hat{\vec{P}}$ a $\hat{\vec{A}}$ komutují a navíc působí na různé části Hilbertova prostoru, takže

$$\begin{aligned} W_{|i_{\check{c}},i_{\text{p}}\rangle\to|f_{\check{c}},f_{\text{p}}\rangle}(T) &\approx \frac{1}{\hbar^2} I_T\left(\frac{E_f - E_i}{\hbar}\right)\left|\frac{e}{m}\langle f_{\check{c}}|\hat{\vec{P}}|i_{\check{c}}\rangle\langle f_{\text{p}}|\hat{\vec{A}}|i_{\text{p}}\rangle\right|^2 \\ &= \frac{e^2}{2m^2\hbar\varepsilon_0 V} I_T(\cdots)\left|\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{\omega(\vec{k})}}\langle f_{\check{c}}|(\vec{\epsilon}(\vec{k},\lambda)\cdot\hat{\vec{P}})|i_{\check{c}}\rangle\langle f_{\text{p}}|(\hat{a}_{\vec{k},\lambda} + \hat{a}^\dagger_{\vec{k},\lambda})|i_{\text{p}}\rangle\right|^2 \end{aligned} \tag{1.60}$$

Proč se aproximace nazývá dipólová, se dozvíme, využijeme-li následujícího triku:

$$\hat{\vec{P}} = \frac{m}{i\hbar}\left[\hat{\vec{X}}, \hat{H}_{\text{částice}}\right] \tag{1.61}$$

a vlastnost, že $|i_{\check{c}}\rangle$ a $|f_{\check{c}}\rangle$ jsou vlastní stavy volného částicového Hamiltoniánu s energiemi $E_i^{(\check{c})}$, resp. $E_f^{(\check{c})}$:

$$\langle f_{\check{c}}|\hat{\vec{P}}|i_{\check{c}}\rangle = \frac{m}{i\hbar}\langle f_{\check{c}}|(\hat{\vec{X}}\hat{H}_{\check{c}} - \hat{H}_{\check{c}}\hat{\vec{X}})|i_{\check{c}}\rangle = \frac{m}{i\hbar}(E_i^{(\check{c})} - E_f^{(\check{c})})\langle f_{\check{c}}|\hat{\vec{X}}|i_{\check{c}}\rangle. \tag{1.62}$$

Pak totiž lze psát

$$W_{|i_{\check{c}},i_{\text{p}}\rangle\to|f_{\check{c}},f_{\text{p}}\rangle}(T) \approx \frac{1}{2\hbar^3\varepsilon_0 V} I_T(\cdots)\left|\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\vec{k}} \frac{\Delta E^{(\check{c})}}{\sqrt{\omega(\vec{k})}}\langle f_{\check{c}}|(\vec{\epsilon}(\vec{k},\lambda)\cdot\hat{\vec{D}})|i_{\check{c}}\rangle\langle f_{\text{p}}|(\hat{a}_{\vec{k},\lambda} + \hat{a}^\dagger_{\vec{k},\lambda})|i_{\text{p}}\rangle\right|^2, \tag{1.63}$$

kde $\hat{\vec{D}} = e\hat{\vec{X}}$ je operátor dipólového momentu částice.

Vidíme, že z hlediska pole jsou jediné povolené přechody (s nenulovou pravděpodobností v první řádu rozvoje) takové, kde $|f_{\mathrm{p}}\rangle$ má překryv buď s $\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}\,|i_{\mathrm{p}}\rangle$ nebo s $\hat{a}_{\vec{k},\lambda}|i_{\mathrm{p}}\rangle$. Tedy takové, ve kterých v jednom z módů vznikne nebo zanikne právě jeden foton. Navíc víme odpovídající skalární součiny,

$$\begin{aligned}\langle n_1, n_2, \ldots, n_j+1, \ldots |\, \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}_j,\lambda_j}\, |n_1, n_2, \ldots, n_j, \ldots\rangle &= \sqrt{n_j+1},\\ \langle n_1, n_2, \ldots, n_j+1, \ldots |\hat{a}_{\vec{k}_j,\lambda_j}|n_1, n_2, \ldots, n_j, \ldots\rangle &= \sqrt{n_j},\end{aligned} \tag{1.64}$$

ze kterých snadno dopočítáme pravděpodobnost *emise*

$$W_{\text{emise do } \vec{k}_j,\lambda_j}(T) \approx \frac{1}{2\hbar^2\varepsilon_0 V} I_T\left(\frac{\Delta E^{(\mathrm{celk})}}{\hbar}\right) \frac{(\Delta E^{(\check{\mathrm{c}})})^2}{\Delta E^{(\mathrm{p})}} \left|\langle f_{\check{\mathrm{c}}}|(\vec{\varepsilon}(\vec{k},\lambda)\cdot\hat{\vec{D}})|i_{\check{\mathrm{c}}}\rangle\right|^2 (n_j+1) \tag{1.65}$$

a pravděpodobnost *absorpce*

$$W_{\text{absorpce } \vec{k}_j,\lambda_j}(T) \approx \frac{1}{2\hbar^2\varepsilon_0 V} I_T\left(\frac{\Delta E^{(\mathrm{celk})}}{\hbar}\right) \frac{(\Delta E^{(\check{\mathrm{c}})})^2}{|\Delta E^{(\mathrm{p})}|} \left|\langle f_{\check{\mathrm{c}}}|(\vec{\varepsilon}(\vec{k},\lambda)\cdot\hat{\vec{D}})|i_{\check{\mathrm{c}}}\rangle\right|^2 n_j \tag{1.66}$$

Pěkný výsledek je, že pravděpodobnost emise se dá rozložit na pravděpodobnost *stimulované* emise, číselně rovnou pravděpodobnosti absorpce, která je přímo úměrná počtu fotonů v daném módu přítomných (a necitlivá k žádným ostatním fotonům), a pravděpodobnost *spontánní* emise, nezávislou na polních proměnných. Dále člen s $\hat{\vec{D}}$ zodpovídá za známé geometrické rozložení vyzařování dipólu. Tyto vlastnosti dobře popisují experimentálně ověřené fakty.

Pro velké (ale konečné) objemy se ještě hodí asymptotický vztah

$$\frac{I_T(\omega)}{T} \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \pi\delta(\omega), \tag{1.67}$$

který pro velké hodnoty T zajišťuje zachování celkové energie

$$\Delta E^{(\mathrm{celk})} = 0, \quad \Delta E^{(\mathrm{p})} = -\Delta E^{(\check{\mathrm{c}})} \tag{1.68}$$

a navíc umožňuje psát výsledek ve formě pravděpodobností za jednotku času. Počet fotonů v módu $|\vec{k}_j,\lambda_j\rangle$ je pak možno brát jako hustotu počtu fotonů (v počátečním stavu) s danou hybností na prostorový úhel v jistém okolí $\vec{k}_j$ a s danou polarizací. Detaily opět viz [**?**].

Tento explicitní výpočet dává příklad obecné interpretace nejjednodušších členů interakčního hamiltoniánu. Obecně členy tvaru $\hat{O}\,\hat{a}^{\dagger}_i$ (doprovázené $\hat{O}^{\dagger}\hat{a}_i$ pro samosdruženost hamiltoniánu) odpovídají interakcím, při kterých je do pole vyzářena / z pole pohlcena jedna částice, za současné změny stavu druhého fyzikálního systému. Díky

faktorům (1.64) je pravděpodobnost absorpce přímo úměrná počtu částic (excitací) pole, které jsou v odpovídajícím módu k dispozici, a pravděpodobnost emise je navýšena o možnost spontánní emise. Členy kombinující $\hat{a}_i^\dagger\, \hat{a}_i$ odpovídají volné oscilaci pole. Další členy vyšších řádů bychom interpretovali podobným způsobem:

1. $\hat{O}\hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j + \hat{O}^\dagger \hat{a}_i \hat{a}_j^\dagger$: rozptýlení částice pole na bodové částici za současné změny stavu částice,

2. $\hat{a}_i^\dagger \hat{b}_j + \hat{a}_i \hat{b}_j^\dagger$ (za přítomnosti dvou polí): změna druhu jedné polní částice na jiný,

3. $\hat{a}_i^\dagger \hat{b}_j \hat{b}_k + \hat{a}_i \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_k^\dagger$: rozpad částice jednoho pole na dvě částice jiného, syntéza jedné částice srážkou dvou částic druhého pole

a tak dále.

Obdobně jako u elektromagnetického pole se postupuje i ve fundamentálních teoriích elementárních částic, ale v této aplikaci je třeba zvážit i další problémy, např.

1. Fockův prostor stavů je konstruován pomocí řešení volných neinteragujících částic. Kanonická hybnost má jiný význam pro interagující částici, než pro volnou. Do jaké míry je oprávněné použití $\hat{H}_0$ pro interagující částice?

2. Problémy s kalibračními stupni volnosti se ještě zvětší při použití neabelovských kalibračních teorií (elektroslabé, silné interakce).

3. Poruchové rozvoje mají tendenci nekonvergovat. Jsou pak potřeba pokročilé techniky jako renormalizační teorie a podobně.

Tyto problémy už opravdu přenecháme kvantové teorii pole.