1 Reprezentace vícečásticových systémů

Nechť Hilbertův prostor jedné částice je nějaký separabilní $\mathscr{H}$, na němž zvolíme konečnou nebo spočetnou bázi $(|1\rangle, |2\rangle, \ldots) = (|i\rangle)_{i\in\mathscr{I}}$.

Uvažujme n částic stejného typu, t.j. nerozlišitelných; jak vypadá báze příslušného Hilbertova prostoru

$$\mathscr{H}_n = \begin{cases} \mathscr{S}\big(\underbrace{\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}\ldots\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}}_{n\text{-krát}}\big), \\ \mathscr{A}\big(\underbrace{\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}\ldots\mathscr{H}\otimes\mathscr{H}}_{n\text{-krát}}\big), \end{cases} \tag{1.1}$$

kde $\mathscr{S}$ a $\mathscr{A}$ označuje symetrickou či antisymetrickou část? (Proč ty jsou pro nerozlišitelné částice nutné, jsme odvozovali v [**?**].)

Označme si m_k index vektoru v bázi k-tého Hilbertova prostoru v (1.1), dohromady tak dostaneme vektor přirozených čísel – multiindex $(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$. Ten parametrizuje bázi celkového Hilbertova prostoru, protože ta je tvořena normovanými vektory

$$\frac{\mathscr{S}/\mathscr{A}\left(|m_1\rangle\otimes|m_2\rangle\otimes\ldots\otimes|m_n\rangle\right)}{\|\ldots\|}, \tag{1.2}$$

kde $\mathscr{S}$, resp. $\mathscr{A}$ působící na vektor značí jeho ortogonální projekci na odpovídající stavový prostor. Takto bychom ovšem mnoho stavů započítali několikrát, při vyčíslování báze si tedy zavedeme podmínku $m_1 \le m_2 \le \ldots \le m_n$, což takovým kolizím zabrání. Pro fermiony je podmínku ještě potřeba posílit na $m_1 < m_2 < \ldots < m_n$, jinak by antisymetrizace v případech s rovností dávala nulové vektory.

1.1 Obsazovací čísla, Fockův prostor

Ukazuje se býti užitečným místo $(m_1, \ldots, m_n)$ parametrizovat bázi tzv. **obsazovacími čísly** $(n_1, n_2, \ldots)$, $n_i \in \mathbb{N}_0$ a $\sum_{i\in\mathscr{I}} n_i = n$, která se definují jako

$$n_i = \#\left\{k \in \hat{n} : m_k = i\right\},$$

kde $\hat{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Obsazovací číslo n_i tedy představuje počet částic ve stavu $|i\rangle$. Pomocí obsazovacích čísel zapíšeme stav (1.2) jako

$$|n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\rangle = \frac{\mathscr{S}/\mathscr{A}\big(\overbrace{|1\rangle\otimes\ldots\otimes|1\rangle}^{n_1\text{-krát}}\otimes\overbrace{|2\rangle\otimes\ldots\otimes|2\rangle}^{n_2\text{-krát}}\ldots\big)}{\|\ldots\|}. \tag{1.3}$$

Pro ferminony musíme vyžadovat $\forall i : n_i \in \{0, 1\}$.[1] Při překročení jednoho fermionu na bázový stav by antisymetrizace dala nulový vektor a normalizace by nebyla definovaná.

[1] To znamená, že v (1.3) budou hodnoty n_i značit přítomnost nebo nepřítomnost daného členu.

Naším cílem je formalizovat Hilbertův prostor pro libovolný počet částic, tj. prostor, který by obsahoval stavy se všemi možnými počty částic v různých stavech a jejich superpozice. Tento prostor se nazývá **Fockův prostor** a pro fermiony a bosony se definuje zvlášť. Označme

$$\mathscr{H}^{\otimes k} = \underbrace{\mathscr{H} \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}}_{k\text{-krát}}, \tag{1.4}$$

kde $\mathscr{H}$ je stále Hilbertův prostor jedné částice, a kde dodefinujeme $\mathscr{H}^{\otimes 0} = \mathbb{C}$. S pomocí této notace např. pro bosony hned umíme napsat hledaný prostor jako direktní součet prostoru pro vakuum ($\mathbb{C}$), prostoru jedné částice, dvou, ...

$$\mathscr{F}_B(\mathscr{H}) = \mathbb{C} \oplus \mathscr{H} \oplus \mathscr{S}(\mathscr{H}^{\otimes 2}) \oplus \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathscr{S}(\mathscr{H}^{\otimes k}), \tag{1.5}$$

a stejně tak pro fermiony

$$\mathscr{F}_F(\mathscr{H}) = \mathbb{C} \oplus \mathscr{H} \oplus \mathscr{A}(\mathscr{H}^{\otimes 2}) \oplus \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathscr{A}(\mathscr{H}^{\otimes k}). \tag{1.6}$$

Je hned vidět, že pro $\dim \mathscr{H} < \infty$ tak dostáváme

$$\begin{aligned} \dim \mathscr{F}_B(\mathscr{H}) &= \infty, \\ \dim \mathscr{F}_F(\mathscr{H}) &= 2^{\dim \mathscr{H}}. \end{aligned}$$

Z konstrukce Fockova prostoru dále vyplývá, že pokud $\mathscr{H}$ je separabilní, $\mathscr{F}_B(\mathscr{H})$ i $\mathscr{F}_F(\mathscr{H})$ jsou separabilní Hilbertovy prostory, pokud dodefinujeme skalární součin pro $n_1 \neq n_2$, $|\psi\rangle \in \mathscr{H}^{\otimes n_1}$ a $|\varphi\rangle \in \mathscr{H}^{\otimes n_2}$ jako

$$\langle \psi | \varphi \rangle = 0 \tag{1.7}$$

a pro $n_1 = n_2 = n$ využijeme definice skalárního součinu na tenzorovém součinu prostorů – pro $|\psi_1\rangle \ldots |\psi_n\rangle$, $|\varphi_1\rangle \ldots |\varphi_n\rangle$ definujeme

$$(\langle \psi_1| \ldots \langle \psi_n|)\,(|\varphi_1\rangle \ldots |\varphi_n\rangle) = \langle \psi_1|\varphi_1\rangle \ldots \langle \psi_n|\varphi_n\rangle. \tag{1.8}$$

S pomocí těchto skalárních součinů už umíme spočítat skalární součin libovolných dvou vektorů z Fockova prostoru, obecný direktní součet by se rozložil na součet jednotlivých skalárních součinů, jak je zvykem.

1.2 Bosonové kreační a anihilační operátory

Zavádět Fockův prostor nemá mnoho významu bez operátorů, které by vyjadřovaly zobrazení mezi jednotlivými částmi direktního součtu, tj. měnily počet částic v systému. Zavedeme zde kreační a anihilační operátory, které mají velký význam pro druhou kvantizaci.[2]

[2] Jestliže vám připomínají formalizmus kolem harmonického oscilátoru ze zimy, jste na dobré cestě.

Prvně se soustřeďme na bosonové operátory v bosonovém Fockově prostoru. Budeme požadovat, aby **kreační operátor** $\hat{a}_i^\dagger$ přidával do systému jednu částici v i-tém stavu, tj. pro bázové vektory

$$\hat{a}_i^\dagger : \mathscr{F}_B(\mathscr{H}) \to \mathscr{F}_B(\mathscr{H}) : \hat{a}_i^\dagger \, |n_1, \ldots, n_i, \ldots\rangle = \beta_{n_i} |n_1, \ldots, n_i + 1, \ldots\rangle,$$

kde konstanta β_{n_i} prozatím zůstává neurčena. Když už budeme mít kreační operátor, odpovídající **anihilační operátor** definujeme pomocí hermitovského sdružení

$$\hat{a}_i = \left(\hat{a}_i^\dagger\right)^\dagger. \tag{1.9}$$

Abychom viděli, jaké konstanty β'_{n_i} zvolit u anihilačních operátorů, rozepíšeme si jejich působení ve skalárním součinu

$$\begin{aligned}
\langle m_1, \ldots, m_i, \ldots | \left(\hat{a}_i^\dagger\right)^\dagger | n_1, \ldots, n_i, \ldots\rangle &= \overline{\langle n_1, \ldots, n_i, \ldots | \, \hat{a}_i^\dagger \, | m_1, \ldots, m_i, \ldots\rangle} \\
&= \overline{\beta_{n_i} \langle n_1, \ldots, n_i, \ldots | m_1, \ldots, m_i + 1, \ldots\rangle} \\
&= \overline{\beta_{n_i}} \delta_{n_1, m_1} \ldots \delta_{n_i, m_i + 1} \ldots \\
&= \begin{cases} 0 & \text{pro } n_i = 0 \\ \ldots & \text{pro } n_i > 0 \end{cases} \\
&= \overline{\beta_{n_i - 1} \langle n_1, \ldots, n_i - 1, \ldots | m_1, \ldots, m_i, \ldots\rangle} \\
&= \overline{\beta_{n_i - 1}} \langle m_1, \ldots, m_i, \ldots | n_1, \ldots, n_i - 1, \ldots\rangle,
\end{aligned}$$

neboli vidíme, že

$$\hat{a}_i | n_1, \ldots, n_i, \ldots\rangle = \begin{cases} 0 & \text{pro } n_i = 0, \\ \overline{\beta_{n_i - 1}} | n_1, \ldots, n_i - 1, \ldots\rangle & \text{pro } n_i > 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Vhodnou volbu konstant β_{n_i} najdeme z volby komutačních relací kreačního a anihilačního operátoru. Nejprve si ale připravíme $\left[\hat{a}_i, \hat{a}_j\right]$ pro $n_i, n_j > 0$

$$\begin{aligned}
\left[\hat{a}_i, \hat{a}_j\right] | n_1, \ldots, n_i, \ldots, n_j, \ldots\rangle &= \overline{\beta_{n_i - 1} \beta_{n_j - 1}} | n_1, \ldots, n_i - 1, \ldots, n_j - 1, \ldots\rangle \\
&\quad - \overline{\beta_{n_j - 1} \beta_{n_i - 1}} | n_1, \ldots, n_i - 1, \ldots, n_j - 1, \ldots\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pro $n_i = 0 \vee n_j = 0$ nebo pro $i = j$ je výsledek stejný triviálně. Úplně stejně by se ukázalo, že kreační operátory vzájemně komutují. Zkusme nyní pro $i \neq j$

$$\begin{aligned}
\left[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\right] | n_1, \ldots, n_i, \ldots, n_j, \ldots\rangle &= \overline{\beta_{n_i - 1}} \beta_{n_j} | n_1, \ldots, n_i - 1, \ldots, n_j + 1, \ldots\rangle \\
&\quad - \beta_{n_j} \overline{\beta_{n_i - 1}} | n_1, \ldots, n_i - 1, \ldots, n_j + 1, \ldots\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

a nakonec pro $i = j$

$$\left[\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger\right] |n_1, \ldots, n_i, \ldots\rangle = \overline{\beta_{n_i}}\beta_{n_i}|n_1, \ldots, n_i, \ldots\rangle - \beta_{n_i-1}\overline{\beta_{n_i-1}}|n_1, \ldots, n_i, \ldots\rangle.$$

Poslední komutátor položíme roven jedničce, abychom se co nejvíce přiblížili lineárnímu harmonickému oscilátoru. Celkově tedy pokládáme

$$\left[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\right] = \delta_{ij}\mathbb{1}. \tag{1.11}$$

Ke splnění postačí volba $\beta_{n_i} = \sqrt{n_i + 1}$:

$$\overline{\beta_{n_i}}\beta_{n_i} - \beta_{n_i-1}\overline{\beta_{n_i-1}} = \sqrt{n_i+1}\sqrt{n_i+1} - \sqrt{n_i}\sqrt{n_i} = 1.$$

Shrnutí naší volby tedy je

$$\begin{aligned}\hat{a}_i|n_1, \ldots, n_i, \ldots\rangle &= \sqrt{n_i}|n_1, \ldots, n_i - 1, \ldots\rangle,\\ \hat{a}_i^\dagger\,|n_1, \ldots, n_i, \ldots\rangle &= \sqrt{n_i + 1}|n_1, \ldots, n_i + 1, \ldots\rangle.\end{aligned}$$

Nyní stav s danými obsazovacími čísly můžeme zapsat výhodně jako

$$|n_1, n_2, \ldots\rangle = \frac{\hat{a}_1^{\dagger n_1}}{\sqrt{n_1!}}\frac{\hat{a}_2^{\dagger n_2}}{\sqrt{n_2!}}\ldots|0\rangle,$$

kde $|0\rangle$ je vakuový stav, který splňuje

$$\hat{a}_j|0\rangle = 0, \forall j \in \mathscr{I}, \tag{1.12}$$

a díky tomu lze Fockův prostor napsat jako

$$\mathscr{F}_B(\mathscr{H}) = \text{span}\left\{\left(\prod_{i\in\mathscr{I}}\frac{\hat{a}_i^{\dagger n_i}}{\sqrt{n_i!}}\right)|0\rangle \,\middle|\, \sum_{i\in\mathscr{I}} n_i < +\infty\right\}.$$

1.2.1 Operátory počtu částic

Pomocí kreačních a anihilačních operátorů lze zavést **operátor počtu částic v *i*-tém stavu**

$$\hat{N}_i = \hat{a}_i^\dagger\,\hat{a}_i, \tag{1.13}$$

podívejme se, jak působí:

$$\begin{aligned}\hat{a}_i^\dagger\,\hat{a}_i|n_1, \ldots, n_i, \ldots\rangle &= \hat{a}_i^\dagger\,\hat{a}_i\left(\prod_{j\in\mathscr{I}}\frac{\hat{a}_j^{\dagger n_j}}{\sqrt{n_j!}}\right)|0\rangle\\ &= \underbrace{\prod_{j\in\mathscr{I}, j\neq i}\frac{\hat{a}_j^{\dagger n_j}}{\sqrt{n_j!}}\frac{\hat{a}_i^\dagger}{\sqrt{n_i!}}}_{=A}\left(\hat{a}_i\left(\hat{a}_i^\dagger\right)^{n_i}\right)|0\rangle = *,\end{aligned}$$

kde jsme využili toho, že operátory stejného druhu komutují a stejně tak komutují kreační a anihilační operátory s různými indexy, dále použijeme n_i-krát známý komutátor (1.11)

$$\begin{aligned}
* &= A\left(\underbrace{\left[\hat{a}_i,\hat{a}_i^\dagger\right]}_{1}\hat{a}_i^{\dagger n_i-1}+\hat{a}_i^\dagger\,\hat{a}_i\,\hat{a}_i^{\dagger n_i-1}\right)|0\rangle\\
&= |n_1,\ldots,n_i,\ldots\rangle + A\,\hat{a}_i^\dagger\,\hat{a}_i\,\hat{a}_i^{\dagger n_i-1}|0\rangle\\
&= |n_1,\ldots,n_i,\ldots\rangle + A\,\hat{a}_i^\dagger\left(\hat{a}_i^\dagger\,\hat{a}_i\,\hat{a}_i^{\dagger n_i-2}+\hat{a}_i^{\dagger n_i-2}\right)|0\rangle\\
&= 2|n_1,\ldots,n_i,\ldots\rangle + A\,\hat{a}_i^{\dagger 2}\,\hat{a}_i\,\hat{a}_i^{\dagger n_i-2}|0\rangle\\
&\vdots\\
&= n_i|n_1,\ldots,n_i,\ldots\rangle,
\end{aligned}$$

a vidíme, že operátor $\hat{N}_i$ je věrný svému názvu.

Pomocí těchto operátorů lze dále definovat **operátor celkového počtu částic**

$$\hat{N}=\sum_{i\in\mathscr{I}}\hat{N}_i=\sum_{i\in\mathscr{I}}\hat{a}_i^\dagger\,\hat{a}_i. \tag{1.14}$$

Také si všimněme toho, že $\left\{\hat{N}_i\right\}_{i=1}^{+\infty}$ tvoří na $\mathscr{F}_B(\mathscr{H})$ úplný soubor komutujících operátorů se společnými vlastními vektory $|n_1,\ldots,n_i,\ldots\rangle$.

1.2.2 Časový vývoj

Uvažujme nejprve soustavu n neinteragujících částic. Z hlediska operátoru časového vývoje se každá vyvíjí nezávisle na ostatních, tedy evoluci n částic jsme schopni zapsat pomocí jednočásticových operátorů časového vývoje jako

$$\hat{U}_n(t,t_0)=\hat{U}_1(t,t_0)\otimes\hat{U}_1(t,t_0)\otimes\ldots\otimes\hat{U}_1(t,t_0)=:\hat{U}_1(t,t_0)^{\otimes n}. \tag{1.15}$$

Hamiltonián celkového systému získáme časovou derivací (1.15). Podle Leibnizova pravidla, ohnutého pro tenzorový součin,

$$\hat{H}=\hat{H}_1\otimes I\otimes\ldots\otimes I\;+\;I\otimes\hat{H}_1\otimes I\otimes\ldots\otimes I\;+\;\ldots\;+\;I\otimes\ldots\otimes\hat{H}_1=:\hat{H}_1^{\oplus n}.$$

Pokud $(|i\rangle)_{i\in\mathscr{I}}$ je báze vlastních stavů energie v $\mathscr{H}$, $\hat{H}_1|i\rangle=E_i|i\rangle$, můžeme přepsat působení takového hamiltoniánu do formalizmu obsazovacích čísel jako

$$\hat{H}|n_1,\ldots,n_i,\ldots\rangle=\sum_{i\in\mathscr{I}}n_iE_i|n_1,\ldots,n_i,\ldots\rangle, \tag{1.16}$$

což je vzorec použitelný nejen pro pevný celkový počet částic n, ale i na Fockově prostoru. Odsud už je jen krok k přepisu pomocí operátorů počtu částic,

$$\hat{H}|n_1,\ldots,n_i,\ldots\rangle=\sum_{i\in\mathscr{I}}E_i\hat{N}_i|n_1,\ldots,n_i,\ldots\rangle. \tag{1.17}$$

Protože jsme tak rozepsali působení operátoru na každém bazickém vektoru, platí i operátorově

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{\infty} E_i \hat{N}_i = \sum_{i \in \mathscr{I}} E_i \, \hat{a}_i^\dagger \, \hat{a}_i, \tag{1.18}$$

pro neinteragující částice na $\mathscr{F}_B(\mathscr{H})$.

Pokud budeme chtít započítat interakci, musíme přidat další členy do hamiltoniánu, které také zapíšeme pomocí kreačních a anihilačních operátorů. Významnou třídu takových operátorů tvoří ty, pro které

$$\left[\hat{H}, \hat{N}\right] = 0, \tag{1.19}$$

které zachovávají celkový počet částic.

1.2.3 Spojité stupně volnosti

Formálně lze uvažovat popis interakce pomocí obsazovacích čísel příslušejících i operátorům se spojitým spektrem či kombinacím komutujících operátorů, obvykle hybnosti a spinu. Označme odpovídající kreační a anihilační operátory jako

$$\hat{a}^\dagger_{\vec{p},\xi}, \hat{a}_{\vec{p},\xi}, \tag{1.20}$$

kde $\vec{p}$ předepisuje tři složky hybnosti a ξ spin částice, kterou takový operátor vytvoří nebo anihiluje

$$\hat{a}^\dagger_{\vec{p},\xi} \left|0\right\rangle \longleftrightarrow \psi_{\vec{p},\xi}(\vec{x}). \tag{1.21}$$

Třeba

$$\hat{a}^\dagger_{\vec{p},\xi} \, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}',\xi} \left|0\right\rangle, \tag{1.22}$$

odpovídá stavu se dvěma částicemi s daným spinem a hybnostmi $\vec{p}$ a $\vec{p}'$, neboli stavu popsaném vlnovou funkcí $\mathscr{S}\left(\psi_{\vec{p},\xi}(\vec{x})\psi_{\vec{p}',\xi}(\vec{y})\right)$.

Postulujeme komutační relace dle stejné logiky jako výše, ale s Diracovou funkcí místo Kroneckerovy delty u spojitých indexů:

$$\begin{aligned}
\left[\hat{a}_{\vec{p},\xi}, \hat{a}_{\vec{p}',\xi'}\right] &= 0, \\
\left[\hat{a}^\dagger_{\vec{p},\xi}, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}',\xi'}\right] &= 0, \\
\left[\hat{a}_{\vec{p},\xi}, \hat{a}^\dagger_{\vec{p}',\xi'}\right] &= \delta_{\xi,\xi'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \mathbb{1}.
\end{aligned}$$

Ve vyjádření pro obecný vektor z takového Fockova prostoru je pak potřeba sumu nahradit integrálem,

$$\left|\varphi\right\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=1}^{k} \int \mathrm{d}^3 p_j \sum_{\xi_j} \right) \alpha^{p_1,\ldots,p_k}_{\xi_1,\ldots,\xi_k} \prod_{j=1}^{k} \hat{a}^\dagger_{\vec{p}_j,\xi_j} \left|0\right\rangle, \tag{1.23}$$

kde v koeficientech $\alpha^{p_1,\ldots,p_k}_{\xi_1,\ldots,\xi_k}$ jsou schované informace o stavu.

1.3 Fermionové kreační a anihilační operátory

Podobně jako pro bosony zavedeme fermionový kreační operátor $\hat{b}_j^\dagger$. Rozepíšeme jeho působení na stav s obsazovacími čísly $(n_i)_{i\in\mathscr{I}}$ a budeme uvažovat, že konzistentně přidává j-tý stav *nalevo* od již existujících stavů.[3] To je důležité, protože antisymetrizace pak přidá správný znaménkový faktor:

$$\begin{aligned}
\hat{b}_j^\dagger \,|n_1,\ldots,n_j=0,\ldots\rangle &= \hat{b}_j^\dagger \,\frac{\mathscr{A}\left(|1\rangle^{\otimes n_1}\otimes|2\rangle^{\otimes n_2}\otimes\ldots\right)}{\|\ldots\|}\\
&= \frac{\mathscr{A}\left(|j\rangle\otimes|1\rangle^{\otimes n_1}\otimes|2\rangle^{\otimes n_2}\otimes\ldots\right)}{\|\ldots\|}\\
&= (-1)^{\sum_{k=1}^{j-1} n_k}\,\frac{\mathscr{A}\left(|1\rangle^{\otimes n_1}\otimes|2\rangle^{\otimes n_2}\otimes\ldots\otimes|j\rangle\otimes\ldots\right)}{\|\ldots\|}\\
&= (-1)^{\sum_{k=1}^{j-1} n_k}\,|n_1,n_2,\ldots,n_j'=1,\ldots\rangle.
\end{aligned}$$

Suma v předchozím výrazu počítá, kolik stavů před j–tým je obsazeno. Fermionový anihilační operátor je potom

$$\hat{b}_j|n_1,\ldots,n_j,\ldots\rangle = \begin{cases} 0 & \text{pro } n_j=0,\\ (-1)^{\sum_{k=1}^{j-1} n_k}\,|n_1,\ldots,n_j'=0,\ldots\rangle & \text{pro } n_j=1.\end{cases}$$

Podívejme se, jaké relace naše operátory splňují. Bez újmy na obecnosti nechť $i<j$. Pokud n_i nebo n_j jsou 1, pak

$$\hat{b}_i^\dagger\,\hat{b}_j^\dagger\,|n_1,\ldots,n_i,\ldots,n_j,\ldots\rangle = \hat{b}_j^\dagger\,\hat{b}_i^\dagger\,|n_1,\ldots,n_i,\ldots,n_j,\ldots\rangle = 0,$$

jinak

$$\begin{aligned}
\hat{b}_i^\dagger\,\hat{b}_j^\dagger\,|n_1,\ldots,0,\ldots,0,\ldots\rangle &=\\
&= (-1)^{\sum_{k=1}^{j-1} n_k}\,\hat{b}_i^\dagger\,|n_1,\ldots,0,\ldots,1,\ldots\rangle\\
&= (-1)^{\sum_{k=1}^{i-1} n_k}(-1)^{\sum_{k=1}^{j-1} n_k}|n_1,\ldots,1,\ldots,1,\ldots\rangle\\
&= (-1)^{\sum_{k=i}^{j-1} n_k}|n_1,\ldots,1,\ldots,1,\ldots\rangle,
\end{aligned}$$

podobně

$$\begin{aligned}
\hat{b}_j^\dagger\,\hat{b}_i^\dagger\,|n_1,\ldots,n_i=0,\ldots,n_j=0,\ldots\rangle &=\\
&= (-1)^{\sum_{k=1}^{i-1} n_k}\,\hat{b}_j^\dagger\,|n_1,\ldots,1,\ldots,0,\ldots\rangle\\
&= (-1)^{\left(\sum_{k=1}^{j-1} n_k\right)+1}(-1)^{\sum_{k=1}^{i-1} n_k}|n_1,\ldots,1,\ldots,1,\ldots\rangle\\
&= (-1)^{\left(\sum_{k=i}^{j-1} n_k\right)+1}|n_1,\ldots,1,\ldots,1,\ldots\rangle,
\end{aligned}$$

[3] Pochopitelně j-tý stav nesmí již být obsazen, proto uvažujeme $n_j=0$.

takže ve všech situacích

$$\hat{b}_i^\dagger \, \hat{b}_j^\dagger \, |n_1, \ldots, n_i, \ldots, n_j, \ldots\rangle = - \hat{b}_j^\dagger \, \hat{b}_i^\dagger \, |n_1, \ldots, n_i, \ldots, n_j, \ldots\rangle. \tag{1.24}$$

Z toho vidíme, oproti bosonovým operátorům, že kreační operátory fermionů antikomutují![4]

$$\left\{\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_j^\dagger\right\} = \hat{b}_i^\dagger \, \hat{b}_j^\dagger + \hat{b}_j^\dagger \, \hat{b}_i^\dagger = 0. \tag{1.25}$$

Podobně by se ukázalo

$$\left\{\hat{b}_i, \hat{b}_j\right\} = 0,$$
$$\left\{\hat{b}_i, \hat{b}_j^\dagger\right\} = \delta_{ij}\mathbb{1},$$

a díky tomu lze fermionový stav zapsat pomocí obsazovacích čísel jako

$$|n_1, \ldots, n_i, \ldots\rangle = \hat{b}_1^{\dagger n_1} \ldots \hat{b}_i^{\dagger n_i} \ldots |0\rangle. \tag{1.26}$$

(V tomto případě, na rozdíl od bosonů, na pořadí operátorů záleží!) Z antikomutačních relací je také hned vidět

$$\hat{b}_i^{\dagger 2} = \frac{1}{2}\left\{\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_i^\dagger\right\} = 0, \tag{1.27}$$

což je elegantně zapsaný Pauliho vylučovací princip.

1.3.1 Operátory počtu částic

Obdobně jako v případě bosonů lze zavést operátory počtu částic v j-tém stavu stejným vztahem i pro fermiony,

$$\hat{N}_j = \hat{b}_j^\dagger \, \hat{b}_j.$$

Ty navíc mají zajímavou vlastnost

$$\hat{N}_j^2 = \hat{b}_j^\dagger \, \hat{b}_j \, \hat{b}_j^\dagger \, \hat{b}_j = \hat{b}_j^\dagger \left(\left\{\hat{b}_j, \hat{b}_j^\dagger\right\} - \hat{b}_j^\dagger \, \hat{b}_j\right) \hat{b}_j = \hat{b}_j^\dagger \, \hat{b}_j = \hat{N}_j,$$

která dává opět jinak zapsaný Pauliho vylučovací princip, neboť jediná nezáporná celá čísla, která splňují $n_j^2 = n_j$, a tedy mohou být ve spektru $\hat{N}_j$, jsou jednička a nula.

V naprosté analogii s bosony lze zavést operátor celkového počtu částic

$$\hat{N} = \sum_{j \in \mathscr{I}} \hat{N}_j = \sum_{j \in \mathscr{I}} \hat{b}_j^\dagger \, \hat{b}_j. \tag{1.28}$$

[4] Příští rok v QFT ukážete, že nějaké kreační a anihilační operátory komutují/antikomutují a z toho usoudíte, že jste popisovali bosony/fermiony.

1.3.2 Hamiltonián

Pro neinteragující částice můžeme opět zapsat hamiltonián soustavy fermionů

$$\hat{H} = \sum_{j\in\mathscr{I}} E_j \hat{N}_j = \sum_{j\in\mathscr{I}} E_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j,$$

pokud $(|j\rangle)_{j\in\mathscr{I}}$ je báze vlastních stavů jednočásticového hamiltoniánu.

Užitečná identita pro práci s fermiony je

$$[AB, C] = ABC + (ACB - ACB) - CAB = A\{B, C\} - \{A, C\} B,$$

kterou využijeme například v situacích

$$\left[\hat{H}, \hat{b}_i^\dagger\right] = E_j \left[\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j, \hat{b}_i^\dagger\right] = E_j\Big(\hat{b}_j^\dagger \underbrace{\left\{\hat{b}_j, \hat{b}_i^\dagger\right\}}_{\delta_{ij}} - \underbrace{\left\{\hat{b}_j^\dagger, \hat{b}_i^\dagger\right\}}_{0} \hat{b}_j\Big) = E_i \hat{b}_i^\dagger,$$

$$\left[\hat{H}, \hat{b}_i\right] = -E_i \hat{b}_i$$

pro neinteragující část hamiltoniánů.

1.3.3 Více druhů částic

Pokud potřebujeme teorii popisující více druhů částic, je odpovídající Fockův prostor tenzorovým součinem Fockových prostorů jednotlivých druhů částic

$$\mathscr{F} = \mathscr{F}_B(\mathscr{H}^1) \otimes \ldots \otimes \mathscr{F}_B(\mathscr{H}^\Lambda) \otimes \mathscr{F}_F(\tilde{\mathscr{H}}^1) \otimes \ldots \otimes \mathscr{F}_F(\tilde{\mathscr{H}}^\Sigma), \tag{1.29}$$

kde Λ je počet druhů bosonů a Σ je počet druhů fermionů. Je konvence označit $\hat{a}^\dagger_{\lambda,\vec{p},\xi}$ bosonový kreační operátor λ-té částice s danou hybností a spinem $\{-s_\lambda, -s_\lambda + 1, \ldots, s_\lambda\}$ a obdobně pro fermiony $\hat{b}^\dagger_{\sigma,\vec{p},\xi}$. Dále je obvyklé platnost komutačních relací uvedených výše rozšířit i na různé druhy částic,

$$\begin{aligned}
\left[\hat{a}_{\lambda,\vec{p},\xi}, \hat{a}^\dagger_{\lambda',\vec{p}',\xi'}\right] &= \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\xi\xi'}\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'),\\
\left\{\hat{b}_{\sigma,\vec{p},\xi}, \hat{b}_{\sigma',\vec{p}',\xi'}\right\} &= 0 = \left\{\hat{b}^\dagger_{\sigma,\vec{p},\xi}, \hat{b}^\dagger_{\sigma',\vec{p}',\xi'}\right\}\\
\left\{\hat{b}_{\sigma,\vec{p},\xi}, \hat{b}^\dagger_{\sigma',\vec{p}',\xi'}\right\} &= \delta_{\sigma\sigma'}\delta_{\xi\xi'}\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'),
\end{aligned}$$

a nechat všechny možné kombinace různých (fermionových vs. bosonových) operátorů komutovat,[5]

$$\left[\hat{a}, \hat{b}\right] = 0. \tag{1.30}$$

Lze ještě napsat obecný vektor pro tento systém, ale je to jen komplikovanější, zobecněná analogie vztahu (1.23).

[5] O této volbě bude ještě mluvit vyučující QFT příští rok.