Kapitola 1

Zobrazení indukovaná zobrazením variet, podvariety

Tečné a kotečné zobrazení

Uvažujme dvě variety M a N a hladké zobrazení $\phi : M \to N$.

Definice 1.1. Tečné zobrazení $\phi_\star$ v bodě $p \in M$ indukované zobrazením ϕ je takové zobrazení $\phi_\star : T_pM \to T_{\phi(p)}N$, pro něž platí

$$(\forall X \in T_pM)(\forall f \in C^\infty(N))((\phi_\star(X))f = X(f \circ \phi)).$$

V souřadnicích (x^i) na $U = U^\circ$, kde $p \in U$, (y^a) na $V = V^\circ$, kde $\phi(p) \in V$, máme $\phi_\star$ vyjádřené předpisem $\phi_\star(X) = (\phi_\star(X))^a \left.\frac{\partial}{\partial y^a}\right|_{\phi(p)}$ a tedy

$$\boxed{\phi_\star(X) = X^i \left.\frac{\partial \varphi^a}{\partial x^i}\right|_p \left.\frac{\partial}{\partial y^a}\right|_{\phi(p)}}$$

jak vyplývá ze vztahu $(\phi_\star(X))^a = (\phi_\star(X))y^a = X(\varphi^a(x^i))$, kde $\varphi^a = y^a \circ \phi$, $X = X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$.

Poznámka 1.1. Zobrazení $\phi_\star$ je lineární.

Definice 1.2. Kotečné zobrazení $\phi^\star$ v bodě $\phi(p) \in N$ indukované zobrazením ϕ je takové zobrazení $\phi^\star : T^*_{\phi(p)}N \to T^*_pM$, pro něž platí

$$(\forall X \in T_pM)(\forall\, \omega \in T^*_{\phi(p)}N)((\phi^\star(\omega))X = \omega(\phi_\star(X))).$$

V souřadnicích (x^i) na $U = U^\circ$, kde $p \in U$, (y^a) na $V = V^\circ$, kde $\phi(p) \in V$, máme pro $\phi^\star$ výrazy $\phi^\star(\omega) = (\phi^\star(\omega))_i \left.\mathrm{d}x^i\right|_p$, $\omega = \omega_a \left.\mathrm{d}y^a\right|_{\phi(p)}$, $\phi_\star\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \left.\frac{\partial \varphi^a}{\partial x^i}\right. \left.\frac{\partial}{\partial y^a}\right|_{\phi(p)}$ (viz výše), z čehož plyne vztah $(\phi^\star(\omega))_i = \omega\left(\phi_\star\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right)\right) = \omega_a \left.\frac{\partial \varphi^a}{\partial x^i}\right|_p$ a tedy

$$\boxed{\phi^\star(\omega) = \omega_a \left.\frac{\partial \varphi^a}{\partial x^i}\right|_p \left.\mathrm{d}x^i\right|_p}$$

Kotečné zobrazení $\phi^\star$ můžeme dále přirozeně rozšířit na $\phi^\star : \Lambda^k_{\phi(p)}N \to \Lambda^k_p M$ následujícím způsobem:

$$(\forall X_1, \dots, X_k \in T_pM)(\forall\, \omega \in \Lambda^k_{\phi(p)}N)((\phi^\star(\omega))(X_1, \dots, X_k) = \omega(\phi_\star(X_1), \dots, \phi_\star(X_k))).$$

Máme definována zobrazení $\phi_\star$ v bodě p, $\phi^\star$ v bodě $\phi(p)$. Lze je rozšířit na zobrazení celého $\mathcal{X}(M)$, resp. $\Omega^\bullet(M)$? V případě kotečného zobrazení ano. Pro libovolnou k-formu $\omega \in \Omega^k(N)$ definujeme $\phi^\star(\omega) \in \Omega^k(M)$ předpisem

$$(\forall X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M))((\phi^\star(\omega))(p)(X_1, \dots, X_k) = \omega(\phi(p))(\phi_\star(X_1|_p), \dots, \phi_\star(X_k|_p))),$$

(linearita, antisymetrie, závislost pouze na $X_i(p)$ je zřejmá, hladkost je vidět v lokálních souřadnicích).

Poznámka 1.2. Dále budeme obvykle místo $\phi_\star(X)$, resp. $\phi^\star(\omega)$, psát $\phi_\star X$, resp. $\phi^\star\omega$.

Poznámka 1.3. Pro $f \in C^\infty(N)$ definujeme $\phi^\star f = f \circ \phi$, z čehož plyne vztah $(\phi_\star X)f = X(\phi^\star f)$.

Příklad 1.1. Pro $\gamma : \mathbb{R}[t] \to M$ máme $\gamma_\star \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\Big|_{t=0} = [\gamma]$. Obecněji: $\gamma_\star \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\Big|_t = \dot\gamma(t)$.

Definice 1.3. Výše zavedené zobrazení $\phi^\star : \Omega^\bullet(N) \to \Omega^\bullet(M)$ nazýváme **pullback** při zobrazení ϕ.

Naopak $\phi_\star : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(N)$ obecně definovat nelze. Důvody:

- $(\phi_\star X)(\phi(p)) \equiv \phi_\star(X|_p)$ není definován na celém N, ale jen na $\phi(M)$,
- nemusí být korektní: pokud $(\exists p, \tilde p \in M)(\phi(p) = \phi(\tilde p)$ a současně $\phi_\star(X_p) \neq \phi_\star(X_{\tilde p}) \in T_{\phi(p)}N)$.

Pokud je ϕ difeomorfizmus, pak $\phi_\star : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(N)$ existuje a je definováno předpisem

$$(\phi_\star X)(\phi(p)) = \phi_\star(X|_p).$$

Pokud je ϕ prosté, je $\phi_\star(X)$ definováno jako prvek $\mathcal{X}(\phi(M))$, kde $\phi(M)$ není nutně otevřená množina. Podobně, pokud pro dané ϕ a X nevzniká problém s nejednoznačností, můžeme použít pro výsledek konstrukce bod po bodu označení $\phi_\star(X)$.

Poznámka 1.4. Máme-li difeomorfizmus $\phi : M \to N$, můžeme definovat též $\phi^\star : \mathcal{X}(N) \to \mathcal{X}(M)$ jako

$$(\phi^\star X)f = X(f \circ \phi^{-1}),\ \text{kde } f \in C^\infty(M),\ \text{tj. } \phi^\star X = (\phi^{-1})_\star X,\ \text{neboli } \phi^\star \circ \phi_\star = id|_{\mathcal{X}(M)}\,.$$

Poznámka 1.5. Změna souřadnic na $U = U^\circ$ je speciálním případem difeomorfizmu $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ na $\tilde U \subset \mathbb{R}^n$ a dříve zavedené změny složek vektoru, resp. formy, při změně souřadnic je možné odvodit z obecných vztahů pro tečné, resp. kotečné, zobrazení.

Při skládání zobrazení $\phi : M \to N,\ \psi : N \to O$ dostáváme pro tečné a kotečné zobrazení identity

$$(\psi \circ \phi)_\star = \psi_\star \circ \phi_\star, \quad (\psi \circ \phi)^\star = \phi^\star \circ \psi^\star.$$

Dosazením do definice vnějšího součinu a z definice $\phi^\star$ dále obdržíme vztah

$$\boxed{\phi^\star(\omega_1 \wedge \omega_2) = \phi^\star\omega_1 \wedge \phi^\star\omega_2}$$

Poznámka 1.6. Platí $(\forall \omega \in \Omega^\bullet(N))(\mathrm{d}\phi^\star\omega = \phi^\star\mathrm{d}\omega)$, tj. (odvození je stejné jako při důkazu nezávislosti $\mathrm{d}\omega$ na výběru souřadnic):

$$\boxed{\mathrm{d}_M \circ \phi^\star = \phi^\star \circ \mathrm{d}_N}$$

Věta 1.1. Buď $\phi : M \to N$, $p \in M$, $X \in T_pM$, $\omega \in \Lambda^k_{\phi(p)}N$. Pak platí

$$\phi^\star(i_{\phi_\star(X)}\omega) = i_X(\phi^\star\omega).$$

Důkaz. Dosazením. ■

Poznámka 1.7. Na $X \in \mathcal{X}(M)$, $\omega \in \Omega^\bullet(N)$ lze tvrzení věty aplikovat, pokud je ϕ difeomorfizmus.

Věta 1.2. Pro difeomorfizmus $\phi : M \to N$ platí $(X, Y \in \mathcal{X}(M))$:

$$\phi_\star[X, Y] = [\phi_\star(X), \phi_\star(Y)].$$

Důkaz. $\forall p \in M$, $\forall f \in C^\infty(N)$, ϕ difeomorfizmus, tj. $\phi(M) = N$ a

$$\begin{aligned}(\phi_\star[X,Y])(\phi(p))f &= X(Y(f\circ\phi))(p) - Y(X(f\circ\phi))(p)\\ &= X(\phi_\star Y(f)\circ\phi)(p) - Y(\phi_\star X(f)\circ\phi)(p)\\ &= (\phi_\star X(\phi_\star Y(f))\circ\phi)(p) - (\phi_\star Y(\phi_\star X(f))\circ\phi)(p)\\ &= ([\phi_\star X, \phi_\star Y]f)(\phi(p))\end{aligned}$$

■

Podvariety

Definice 1.4. Mějme $\phi : M \to N$ hladké zobrazení. ϕ nazýváme **vnoření** (angl. immersion) M do N, pokud $\phi_\star$ je prosté v každém bodě $p \in M$. M pak nazýváme **vnořená podvarieta** variety N.

Definice 1.5. Pokud ϕ je prosté vnoření takové, že $\forall p \in M$ existuje okolí $U = U^\circ \subset N$ bodu $\phi(p)$ a souřadnice $(y^a)_{a=1}^{\dim N}$ na U takové, že $\phi(M) \cap U = \{q \in U | y^a(q) = 0, a \in \hat{k}\}$, kde $k = \dim N - \dim M$, nazýváme zobrazení ϕ **vložení** (angl. embedding) a M nazýváme **(vložená) podvarieta** variety N kodimenze k.

Věta 1.3. Whitneyho věta o vnoření: Každá diferencovatelná varieta dimenze n je difeomorfní nějaké vložené C^ω-podvarietě Euklidovského prostoru $\mathbb{R}^{2n}$. (*Bez důkazu.*)