Kapitola 1

Integrace forem

Jedním z důvodů zavedení diferenciálních forem na varietách je to, že jsou přirozenými objekty, které se dají integrovat. Uvažujme na n-rozměrné varietě M n-formu v lokálních souřadnicích (x^i), resp. $(\tilde{x}^j)$. Máme

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_{12\dots n}\ \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n = \omega_{1\dots n}(x(\tilde{x}))\frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^{i_n}}\,\mathrm{d}\tilde{x}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\tilde{x}^{i_n} \\ &= \sum_{\vec{I}} \omega_{1\dots n}\ \delta^{\vec{I}}_{(1\dots n)}\frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^{i_n}}\,\mathrm{d}\tilde{x}^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\tilde{x}^n = \det\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \cdot \omega_{1\dots n}(x(\tilde{x}))\,\mathrm{d}\tilde{x}^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\tilde{x}^n,\end{aligned}$$

tedy

$$\tilde{\omega}_{1\dots n}(\tilde{x}) = \det\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \cdot \omega_{1\dots n}(x(\tilde{x})).$$

Tento vztah připomíná větu o substituci v Lebesgueově integrálu ($x^i = \varphi^i(\tilde{x})$):

$$\int_{\varphi(\Omega)} f\ \mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^n = \int_\Omega f \circ \varphi\ \left|\det\frac{\partial \varphi^i}{\partial \tilde{x}^j}\right| \mathrm{d}\tilde{x}^1 \dots \mathrm{d}\tilde{x}^n.$$

V definici integrálu n-formy ovšem narazíme na dvě nesnáze:

1. rozdíl v absolutní hodnotě jakobiánu – řešíme zavedením orientace
2. možná neexistence globálních souřadnic na M – řešíme pomocí tzv. rozkladu jednotky

Definice 1.1. Orientace vektorového prostoru V, $\dim V = n$, je zobrazení σ přiřazující každé n-tici LN vektorů číslo ± 1 a vyhovující $\forall e_1, \dots, e_n \in V$, $(e_1, \dots, e_n)$ LN, $T \in GL(V)$:

$$\sigma(T(e_1), \dots, T(e_n)) = \frac{\det T}{|\det T|}\ \sigma(e_1, \dots, e_n).$$

Definice 1.2. Mějme vektorový prostor V s orientací σ, $\dim V = n$, $U = U^\circ \subset V$, diferencovatelnou varietu M, $\dim M \geq n$, hladké zobrazení $F : U \to M$ a formu $\omega \in \Omega^n(M)$. Označme $\tilde{U} = F(U)$. Definujeme **integrál z formy ω na množině $\tilde{U}$** při parametrizaci F předpisem

$$\int_{(\tilde{U},F)} \omega = \sigma(e_1, \dots, e_n) \int_U (F^\star\omega)_{1\dots n}\ \mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^n,$$

kde $(x^1, \dots, x^n)$ jsou standardní souřadnice na V, $x^j(a^i e_i) = a^j$, ve zvolené bázi $(e_1, \dots, e_n)$ vektorového prostoru V, $e_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Takto definovaný integrál $\int_{(\tilde{U},F)}\omega$ má následující vlastnost: při výběru jiného V',σ',U' a F' takového, že $F'(U')=\tilde{U}$ a že existuje difeomorfizmus $\phi: U\to U'$ zachovávající orientaci ve smyslu $\sigma'(\phi_\star(\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p),\dots,\phi_\star(\frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p))=\sigma(\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n})$ pro všechny báze $\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ prostoru $T_pV\equiv V$, pro který současně platí $F=F'\circ\phi$, plyne z věty o substituci v Lebesgueově integrálu:

$$\int_{(\tilde{U},F)}\omega=\int_{(\tilde{U},F')}\omega.$$

Poznámka 1.1. Pokud je F prosté, tak až na orientaci hodnota integrálu na F nezávisí.

Definice 1.3. Orientace σ variety M, kde $\dim M=n$, je zobrazení přiřazující každému $p\in M$ orientaci tečného prostoru T_pM tak, že $\forall U=U^\circ\subset M,\ \forall X_1,\dots,X_n\in\mathcal{X}(U)$ taková, že $(X_1|_p,\dots,X_n|_p)$ je LN $\forall p\in U$, platí:

$$\sigma(p)(X_1|_p,\dots,X_n|_p)=f(p)\text{ je konstantní (či ekvivalentně hladká) funkce na }U.$$

Varietu, na níž existuje orientace, nazýváme **orientovatelná**.

Poznámka 1.2. Označení: $\sigma(p)(X_1|_p,\dots,X_n|_p)=\sigma(X_1|_p,\dots,X_n|_p)$.

Poznámka 1.3. Pokud na M, $\dim M=n$, existuje $\omega\in\Omega^n(M)$ taková, že $(\forall p\in M)(\omega(p)\neq 0)$, tak je M orientovatelná a $(X_1,\dots,X_n\in T_pM$ jsou LN):

$$\sigma(X_1|_p,\dots,X_n|_p)=\frac{\omega(X_1,\dots,X_n)(p)}{|\omega(X_1,\dots,X_n)(p)|}.$$

Důsledek 1.1. T^*M je vždy orientovatelná, TM orientovatelná být nemusí.

Pokud v M existuje křivka $\gamma:\langle 0,1\rangle\to M$ taková, že $\gamma(0)=\gamma(1)$, $\gamma(\langle 0,1\rangle)\subset U=U^\circ$ a pro pole $X\in\mathcal{X}(U)$ a $\forall t\in\langle 0,1\rangle$ splňuje $\dot\gamma(t)=X(\gamma(t))$, a LN vektory $E_1,\dots,E_n\in T_{\gamma(0)}M=T_{\gamma(1)}M$ takové, že $(\Psi^1_{X\star}(E_1),\dots,\Psi^1_{X\star}(E_n))$ je báze opačně orientovaná než $(E_1,\dots,E_n)$, tj. matice přechodu z jedné báze do druhé má záporný determinant, pak M není orientovatelná.

Příklad 1.1. Möbiův list není orientovatelný.

Definice 1.4. Buď M diferencovatelná varieta s orientací σ, $\dim M=n$, $U=U^\circ$ souřadnicové okolí se souřadnicemi (x^i), $\varphi: x(U)\subset\mathbb{R}^n\to U$ zobrazení inverzní k souřadnicím. Buď dále forma $\omega\in\Omega^n(M)$ a nosič této formy $\operatorname{supp}\omega=\overline{\{p\in M|\omega(p)\neq 0\}}\subset U$. Definujeme **integrál z formy ω na varietě M** předpisem

$$\int_M\omega=\int_{(U,\varphi)}\omega=\sigma\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right)\int_{x(U)}(\varphi^\star\omega)_{1\dots n}\mathrm{d}x^1\dots\mathrm{d}x^n.$$

Poznámka 1.4. Dle výše uvedeného nezávisí $\int_M\omega$ na výběru souřadnic na U.

Jak integrovat formy, jejichž nosič nelze pokrýt jedinou mapou?

Definice 1.5. Buď M diferencovatelná varieta, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ její otevřené pokrytí. Indexová množina J a soubor funkcí $f_\beta\in C^\infty(M)$, $\beta\in J$, tvoří **rozklad jednotky** podřízený pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ pokud jsou splněny následující podmínky:

1. $(\forall\beta\in J)(\exists\alpha\in I)(\operatorname{supp}f_\beta\subset U_\alpha$ a současně je $\operatorname{supp}f_\beta$ kompaktní)
2. $(\forall p\in M)(\exists K_p\subset J,\#\{K_p\}<+\infty)(\exists U=U^\circ,\ p\in U)(\forall\beta\in J\setminus K_p)(\operatorname{supp}f_\beta\cap U=\varnothing)$
3. $(\forall\beta\in J)(\forall p\in M)(f_\beta(p)\geq 0)$

4. $(\forall p \in M)(\sum_{\beta\in J} f_\beta(p) = \sum_{\beta\in K_p} f_\beta(p) = 1)$

Věta 1.1. Ke každému otevřenému pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ variety M existuje jemu podřízený rozklad jednotky. (Přičemž není určen jednoznačně.)

Důkaz. Bez důkazu. K platnosti věty potřebujeme parakompaktnost v definici variety. ∎

Definice 1.6. Buď M diferencovatelná varieta s orientací σ, $\dim M = n$ a $\omega \in \Omega^n(M)$. Definujeme **integrál z n-formy ω na varietě M** předpisem

$$\int_M \omega = \sum_{\beta\in J} \int_M f_\beta\, \omega,$$

kde $\{f_\beta\}_{\beta\in J}$ je rozklad jednotky podřízený nějakému atlasu $\{U_\alpha, (x^i_\alpha)\}_{\alpha\in I}$.

Poznámka 1.5. $\int_M \omega$ nezávisí na výběru $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

Důkaz. Společné zjemnění $\{U_\alpha \cap \tilde{U}_\beta\}_{\alpha\in I,\, \beta\in\tilde{I}}$ a jemu podřízený rozklad jednotky. ∎