Kapitola 1

Diferencovatelné variety

Geometrickými vlastnostmi matematických struktur se v principu zabývají dvě oblasti matematiky:

- **Algebraická geometrie** zkoumá útvary v daném prostoru ($\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{CP}^n, \dots$) zadané jako množina řešení (systémů) polynomiálních rovnic, tzv. algebraické variety (angl. variety), které mohou obsahovat různé typy singularit, viz např. $x \cdot y = 0$ v $\mathbb{R}^2[x, y]$. Jedná se o velice abstraktní oblast matematiky.
- **Diferenciální geometrie**, neboli globální analýza, zkoumá topologické prostory, které jsou lokálně ztotožnitelné s $\mathbb{R}^n$, ze kterého se na ně přenáší pojmy známé z analýzy. Podstatné jsou vnitřní vlastnosti a jejich popis v různých souřadnicích, nikoliv způsob vnoření do nějakého vektorového či afinního prostoru. Základním pojmem je tzv. diferencovatelná (neboli hladká) varieta (angl. manifold).

V tomto skriptu se budeme věnovat základním pojmům druhé jmenované. Nejprve uveďme pár definic:

Definice 1.1. Topologický prostor (M, τ) je **Hausdorffův** $\Leftrightarrow (\forall x, y \in M, x \neq y)(\exists U = U^\circ, x \in U)(\exists V = V^\circ, y \in V)(U \cap V = \varnothing)$.

Definice 1.2. Nechť jsou $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I} \in \tau, \{V_\beta\}_{\beta\in J} \in \tau$ dvě otevřená pokrytí topologického prostoru (M, τ), tj. $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha = M = \bigcup_{\beta\in J} V_\beta$, pak $\{V_\beta\}_{\beta\in J}$ je **zjemněním** $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I} \Leftrightarrow (\forall \beta \in J)(\exists \alpha \in I)(V_\beta \subset U_\alpha)$.

Definice 1.3. Otevřené pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ topologického prostoru (M, τ) je **lokálně konečné** $\Leftrightarrow (\forall x \in M)(\exists J \subset I, \#\{J\} < +\infty)(\forall \alpha \in I \setminus J)(\{x\} \cap U_\alpha = \varnothing)$.

Definice 1.4. Topologický prostor (M, τ) je **parakompaktní** $\Leftrightarrow$ pro každé pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ existuje lokálně konečné zjemnění.

Definice 1.5. Nechť (M, τ) je topologický prostor, $U = U^\circ \subset M$, $V = V^\circ \subset \mathbb{R}^n$. Pak homeomorfizmus $\varphi : U \to V$ nazýváme **mapa** či **lokální souřadnice** na M. U nazýváme **souřadnicové okolí** v M.

Definice 1.6. Otevřené pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ topologického prostoru (M, τ) vybavené mapami $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$ nazýváme **atlas** na M a n nazýváme **dimenzí atlasu**. Atlas obvykle značíme $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$. (Připomeňme, že $\varphi_\alpha(U_\alpha) = (\varphi_\alpha(U_\alpha))^\circ \subset \mathbb{R}^n$.)

Poznámka 1.1. Klademe $\dim M = n$ (n viz předchozí definice).

Poznámka 1.2. C^ω označuje analytické funkce (tj. jejichž Taylorův rozvoj konverguje v každém bodě). Standardně budeme uvažovat C^∞, tj. funkce libovolněkrát diferencovatelné.

Definice 1.7. Buď $k \in \mathbb{N}$, popř. $k \in \{\infty, \omega\}$. Atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ na M je **třídy C^k** $\Leftrightarrow$ $(\forall \alpha, \beta \in I : U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing)$ je zobrazení $\tau_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ třídy C^k a zároveň zobrazení inverzní je třídy C^k.

Definice 1.8. Zobrazení $\tau_{\alpha\beta}$ z předchozí definice nazýváme **přechodová funkce**.

Definice 1.9. Mapa (U, φ) je **C^k-kompatibilní** s atlasem $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ $\Leftrightarrow$ $(\forall \alpha \in I : U \cap U_\alpha \neq \varnothing)$ $(\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U_\alpha) \to \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ je třídy C^k a současně $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ je třídy C^k, tj. $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ je difeomorfizmus třídy $C^k)$.

Definice 1.10. Atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ třídy C^k na M je **maximální** $\Leftrightarrow$ obsahuje všechny mapy s ním C^k-kompatibilní. Maximální atlas třídy C^∞ na M nazýváme **diferencovatelná** či **hladká struktura** na M.

Definice 1.11. Topologický Hausdorffův parakompaktní prostor (M, τ) vybavený diferencovatelnou strukturou nazýváme **diferencovatelná varieta** (neboli **hladká varieta**).

Poznámka 1.3. Místo parakompaktnosti se často žádá silnější podmínka, a to aby byl prostor (M, τ) **lokálně kompaktní** (tj. každý bod p má kompaktní okolí, tj. kompaktní množinu obsahující otevřenou množinu obsahující p) se **spočetnou bází topologie** (tj. $(\exists \{U_\alpha\}_{\alpha\in I} : U_\alpha = U_\alpha^\circ, I$ je spočetná$)(\forall V \in \tau)$ $(\exists J \subset I)(V = \bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha)$).

Díky lokálnímu ztotožnění topologického prostoru M s prostorem $\mathbb{R}^n$ pomocí atlasu jsme najednou schopni na M např. derivovat, zkoumat hladkost atd. Většinou se setkáme s varietami pokrytými nejvýše spočetným systémem map. Pak lze topologii τ převést pomocí φ_α^{-1} z $\mathbb{R}^n$ a nemusí být zadána předem. Maximalita atlasu se vyžaduje za účelem jednoznačnosti pojmu varieta. Při praktickém počítání použijeme spíše atlas s minimálním počtem map.

Definice 1.12. Spojité zobrazení ϕ dvou diferencovatelných variet M a N $(\phi : M \to N)$ je **hladké** (tj. třídy C^∞) $\Leftrightarrow$ pro každou mapu $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ z atlasu M a pro každou mapu (V_β, ψ_β) z atlasu N, kde $\phi(U_\alpha) \cap V_\beta \neq \varnothing$, je zobrazení $\psi_\beta \circ \phi \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap \phi^{(-1)}(V_\beta)) \subset \mathbb{R}^m \to \psi_\beta(\phi(U_\alpha) \cap V_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ hladké, kde $m = \dim M$ a $n = \dim N$.

Definice 1.13. Hladkou bijekci $\phi : M \to N$ takovou, že ϕ^{-1} je též hladké, nazýváme **difeomorfizmus** variet M a N.

Poznámka 1.4. Difeomorfní variety považujeme za ekvivalentní a pro praktické účely je ztotožňujeme, např. $S^2 \simeq \mathbb{CP}^1$.

Často diferencovatelné variety zadáváme pomocí vazeb, tj. jako vzor $F^{(-1)}(y_0)$ nějakého vybraného bodu $y_0 \in \mathbb{R}^r$ při zobrazení $F : \mathbb{R}^{n+r} \to \mathbb{R}^r$. Topologii na $F^{(-1)}(y_0)$ uvažujeme indukovanou z $\mathbb{R}^{n+r}$ (indukuje se tak lokální kompaktnost, spočetná báze a to, že prostor je Hausdorffův), mapy přenášíme pomocí věty o implicitní funkci. Její aplikací dostáváme následující větu.

Věta 1.1. Buď $F : \mathbb{R}^{r+n} \to \mathbb{R}^r$ třídy C^∞, $y_0 \in \mathbb{R}^r$, $F^{(-1)}(y_0) = \{x \in \mathbb{R}^{r+n} | F(x) = y_0\}$ a nechť $\forall x \in F^{(-1)}(y_0)$ platí $\operatorname{rank} \mathrm{d}F(x) = \dim \mathbb{R}^r = r$. Pak $F^{(-1)}(y_0)$ je diferencovatelnou varietou dimenze n s mapami vytvořenými s využitím věty o implicitní funkci.

Poznámka 1.5. Pokud $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$, tak může nastat situace, kdy jsou všechny přechodové funkce $\tau_{\alpha\beta} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ na svém definičním oboru holomorfní. Tím pádem máme holomorfní atlas definující tzv. n-rozměrnou **komplexní varietu**. Každá n-rozměrná komplexní varieta je $2n$-rozměrnou reálnou varietou, opačná implikace obecně neplatí.

Poznámka 1.6. Máme-li $(M, \tau, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I})$, $(N, \sigma, \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta\in J})$, $\dim M = m, \dim N = n$, dvě variety, pak lze na $M \times N$ přirozeně zavést **součinovou topologii** $\tau \times \sigma$ (otevřené množiny jsou konečné průniky a libovolná sjednocení kartézských součinů otevřených množin). S mapami $\chi_{\alpha\beta} : U_\alpha \times V_\beta \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $\chi_{\alpha\beta}(u, v) = (\varphi_\alpha(u), \psi_\beta(v))$, je pak taková množina $M \times N$ $(m + n)$-rozměrnou diferencovatelnou varietou.