0.1 Exponenciální generující funkce

Definice 0.1.1. Nechť $z \in \mathbb{C}$, $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je číselná posloupnost. **Řadou s exponenciální generující funkcí** (angl. *exponential generating function*, EGF) rozumíme číselnou řadu

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_n}{n!} z^n.$$

Součet této řady nazýváme (exponenciální) **generující funkcí**. Korespondenci posloupnosti koeficientů řady a příslušné exponenciální generujcí funkce $f(z)$ zapisujeme jako

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{EGF} f(z).$$

Poznámka. Srovnáme-li definice **??** a 0.1.1, všimneme si určité inkonzistence v názvosloví. Definice **??** udává název pro řadu, ale definice 0.1.1 hovoří spíše o její generující funkci. Tento rozpor je dědictvím přednášky, kde jsme ve skutečnosti žádné formální definice neměli a hovořili jsme o obyčejných generujících funkcích (angl. *ordinary power **series***, OPS) a o exponenciálních generujících funkcích, které jsme označovali jako EGF. Zájemci o korektní (a/nebo obvyklé) označení jej budou muset hledat v literatuře.

Příklad.

$$(1)_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{EGF} \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

0.1.1 Pravidla pro počítání s EGF

Jestliže

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{EGF} f(z),\ (b_n)_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{EGF} g(z),$$

tak potom lze odvodit následující vztahy:

1. Pro posunutí indexu o 1 platí

   $$\boxed{(a_{n+1})_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{EGF} f'(z)},$$

   protože

   $$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} z^n.$$

2. Pro násobení indexem platí

   $$\boxed{(na_n)_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{EGF} zf'(z)},$$

   protože

   $$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} n z^{n-1} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n \cdot a_n)}{n!} z^n.$$

3. Pro násobení mocninou konstanty platí zřejmě (stejně jako u OPS)

   $$\boxed{(c^n a_n)_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{EGF} f(cz)}.$$

4. Zřejmě platí

   $$\boxed{(a_n \pm b_n)_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{EGF} f(z) \pm g(z)}. \tag{0.1.1}$$

5. Podle vzorce pro násobení mocninných řad platí
$$\boxed{\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k b_{n-k}\right)_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{EGF} f(z)g(z)},$$
protože
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}\frac{b_{n-k}}{(n-k)!}\right)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}_{\binom{n}{k}}a_k b_{n-k}\right)z^n.$$

6. Speciálně pro volbu $b_n = 1$ je $g(z) = \mathrm{e}^z$, a tak
$$\boxed{\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k\right)_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{EGF} \mathrm{e}^z f(z)}. \tag{0.1.2}$$

0.1.2 Jednoduchý příklad

Poznámka. Je zřejmé, že použití generujících funkcí je podmíněno nenulovým poloměrem konvergence příslušných řad. Jak již bylo řečeno, v kombinatorických úlohách zpravidla hledáme posloupnost koeficientů $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Tuto posloupnost sice neznáme, ale v mnoha případech jsme schopni ji nějakým způsobem odhadnout, takže můžeme zdola odhadnout i poloměr konvergence.

Kritériem rozhodování, zda pro řešení dané úlohy použít OPS či EGF, může být právě fakt, že EGF připouští pomalejší klesání posloupnosti a_n (o faktor $n!$) při zachování stejného poloměru konvergence. Při rozhodování nám mnohdy pomůže též „typ“ úlohy - například následující úloha vybízí k použití EGF, neboť její zadání v mnohém připomíná pravidlo (0.1.2).

Příklad 0.1.2. Vypočítejte součet
$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2.$$
Vyjděme z posloupnosti $(1)_{n=0}^{\infty}$ a používejme postupně pravidla z části 0.1.1:
$$\begin{aligned}
(1)_{n=0}^{\infty} &\xrightarrow{EGF} \mathrm{e}^z,\\
(n\cdot 1)_{n=0}^{\infty} &\xrightarrow{EGF} z\mathrm{e}^z,\\
\left(n^2\right)_{n=0}^{\infty} = (n\cdot n)_{n=0}^{\infty} &\xrightarrow{EGF} z\left(\mathrm{e}^z + z\mathrm{e}^z\right) = \left(z+z^2\right)\mathrm{e}^z,\\
(S_n)_{n=0}^{\infty} = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2\right)_{n=0}^{\infty} &\xrightarrow{EGF} \left(z+z^2\right)\mathrm{e}^{2z}.
\end{aligned}$$
Podle posledního řádku platí
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S_n}{n!}z^n = \left(z+z^2\right)\mathrm{e}^{2z}.$$
Najdeme-li tedy rozvoj funkce $\left(z+z^2\right)\mathrm{e}^{2z}$ do mocninné řady, budeme schopni vyjádřit koeficienty S_n. Rozvoj sestrojíme šikovně, neboť nám postačí znalost rozvoje e^z, který vynásobíme polynomem $\left(z+z^2\right)$, takže výsledek bude stále mocninná řada.
$$\left(z+z^2\right)\mathrm{e}^{2z} = \left(z+z^2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(2z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}z^{n+2} = \underbrace{z + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}z^n}_{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}z^n} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-2}}{(n-2)!}z^n.$$

Z uvedeného vztahu je už vidět, že $S_1 = 1$ a

$$\begin{aligned}\frac{S_n}{n!} &= \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{2^{n-2}}{(n-2)!},\\ S_n &= n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2}.\end{aligned}$$

0.1.3 Bernoulliova čísla

Definice 0.1.3. Bernoulliovými čísly rozumíme posloupnost $(B_n)_{n=0}^{\infty}$, pro niž platí

$$(B_n)_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{EGF} \frac{z}{\mathrm{e}^z - 1}.$$

Poznámka 0.1.4. Zabývejme se korektností definice B_n, tj. je-li možné psát funkci $f(z) = \frac{z}{\mathrm{e}^z-1}$ jako součet mocninné řady. Nejprve se podívejme na kořeny jmenovatele. Jestliže vyjádříme z jako $z = i\varphi$, můžeme řešit rovnici

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{i\varphi} &= 1, \text{ tj.}\\ \cos\varphi + i\sin\varphi &= 1,\end{aligned}$$

která má řešení $\varphi = 2k\pi$, neboli $z = 2k\pi i$, kde $k \in \mathbb{Z}$. V bodě $z_0 = 0$ $(k = 0)$ platí

$$\lim_{z\to z_0} \frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} = 1,$$

a v tomto bodě je tedy odstranitelná nespojitost funkce f. Pro $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ a $z_0 = 2k\pi i$ však platí

$$\lim_{z\to z_0} \frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} = \infty,$$

přičemž nejblíže nule jsou body $\pm 2\pi i$. Jiné singulární body funkce f nemá. To znamená, že je holomorfní na kruhu se středem v bodě 0 a s poloměrem 2π a její Laurentův rozvoj v bodě 0 má tedy jen regulární část - je to přímo Taylorův rozvoj. Proto lze skutečně funkci $\frac{z}{\mathrm{e}^z-1}$ rozvinout do mocninné řady (v bodě 0) a poloměr konvergence této řady je 2π (neboť to je vzdálenost k nejbližšímu singulárnímu bodu).

V následujícím se budeme snažit najít hodnoty B_n. Podle definice po vynásobení $(\mathrm{e}^z - 1)$ platí[1]

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n}_{\mathrm{e}^z-1}.$$

Po úpravě dostaneme

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^n.$$

Podle vzorce pro součin mocninných řad můžeme dále upravit na

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n-k+1)!} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

ale to není nic jiného než rozvoj „funkce“ $g(z) = 1$ do mocninné řady. Protože koeficienty rozvoje jsou jednoznačné, platí

$$\begin{aligned}c_0 = B_0 &= 1,\\ c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n-k+1)!} &= 0, \; n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

[1] Od tohoto okamžiku jsme se zbavili odstranitelné nespojitosti funkce $f(z) = \frac{z}{\mathrm{e}^z-1}$ v bodě 0. Pokud v bodě 0 dodefinujeme funkci f její limitou, tj. číslem 1, tak je koeficient B_0 v rozvoji funkce f do mocninné řady roven jedné, neboť to je právě funkční hodnota v bodě 0. Jak uvidíme, po odstranění zlomku k tomuto výsledku dojdeme i jinak.

Po vynásobení poslední rovnosti číslem $n!$ přejde tato rovnost na elegantnější tvar

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0.$$

S pomocí tohoto vztahu jsme schopni rekurzivně vypočítat prvky posloupnosti (B_n):

- $B_1 = -\frac{1}{2}$ zjistíme ze vztahu $\binom{2}{0}B_0 + \binom{2}{1}B_1 = 0$,
- $B_2 = \frac{1}{6}$ vypočítáme z rovnosti $\binom{3}{0}B_0 + \binom{3}{1}B_1 + \binom{3}{2}B_2 = 0$,

a takto můžeme pokračovat. Prvních 16 členů posloupnosti (B_n) má následující hodnoty:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0

8	9	10	11	12	13	14	15	16
$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	0	$\frac{7}{6}$	0	$-\frac{3617}{510}$

Hodnoty B_n se mění na první pohled chaoticky a explicitní vyjádření členů posloupnosti B_n nevypadá jednoduše. My se o něj ani pokoušet nebudeme. Podle hodnot v tabulce však můžeme předpokládat, že

$$B_{2n+1} = 0 \text{ pro } n \geq 1.$$

To je z definice B_n ekvivalentní vztahu

$$\frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} = 1 - \frac{1}{2}z + \text{sudé mocniny } z.$$

Abychom jej dokázali, stačí ukázat, že funkce $f(z) = \frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} + \frac{1}{2}z$ je sudá. To skutečně platí, můžeme ověřit rovnost $f(z) = f(-z)$ nebo provést úpravu $f(z)$ na tvar

$$\frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} + \frac{z}{2} = z\frac{2 + \mathrm{e}^z - 1}{2(e^z - 1)} = \frac{z}{2}\frac{\mathrm{e}^z + 1}{\mathrm{e}^z - 1} = \frac{z}{2}\frac{\mathrm{e}^{\frac{z}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{z}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}} = \frac{z}{2}\coth\left(\frac{z}{2}\right),$$

z nejž je již sudost funkce f zřejmá.

Věta 0.1.5. (Bernoulli)
Nechť $m \in \mathbb{N}$. Potom platí

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m}\binom{m+1}{i} B_i n^{m-i+1}.$$

Příklad. Pro $m = 2$ máme známý vzoreček

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \text{ tj.} \\
\sum_{k=0}^{n-1} k^2 &= \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)
\end{aligned}$$

a podle Bernoulliovy věty vychází

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{1}{3}\left(B_0 n^3 + 3\underbrace{B_1}_{-\frac{1}{2}} n^2 + 3\underbrace{B_2}_{\frac{1}{6}} n\right) = \frac{1}{3}n\left(n^2 - \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}n\left(2n^2 - 3n + 1\right) = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1).$$

Důkaz. Definujeme

$$S_n(m) := \sum_{k=0}^{n-1} k^m$$

a hledáme tedy hodnotu $S_n(m)$. Uvažujme posloupnost $(S_n(m))_{m=0}^{\infty}$ pro index m (!!) jako posloupnost koeficientů řady s EGF. Postupně upravujeme:

$$(S_n(m))_{m=0}^{\infty} \xrightarrow{EGF} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{S_n(m)}{m!} z^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{k=0}^{n-1} k^m \right) z^m = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(kz)^m}{m!}}_{\mathrm{e}^{kz}} =,$$

... napravo máme konečnou geometrickou řadu, kterou můžeme sečíst ...

$$= \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{2z} + ... + \mathrm{e}^{(n-1)z} = \frac{\mathrm{e}^{nz} - 1}{\mathrm{e}^z - 1} = \frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} \cdot \frac{\mathrm{e}^{nz} - 1}{z} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k \right) \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(nz)^i}{i!} \right)}_{\mathrm{e}^{nz} - 1} \frac{1}{z} =$$

... zkrátíme a posuneme indexy ...

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{n^{i+1} z^i}{(i+1)!} \right) =$$

... použijeme vzorec pro násobení mocninných řad, přičemž vnější sčítací index zvolíme jako m ...

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{m} \frac{B_j}{j!} \frac{n^{m-j+1}}{(m-j+1)!} \right) z^m =$$

... nakonec vynásobíme $1 = \frac{(m+1)!}{m!(m+1)}$ a dostaneme ...

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \underbrace{\left(\frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{m} \binom{m+1}{j} B_j n^{m-j+1} \right)}_{S_n(m)} z^m.$$

Na konci máme opět mocninnou řadu s EGF a v závorce tak vystupuje právě koeficient $S_n(m)$. Platí tedy

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = S_n(m) = \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{m} \binom{m+1}{j} B_j n^{m-j+1}.$$

□

Odhady Bernoulliových čísel

Jak jsme si řekli, řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ má poloměr konvergence $\rho = 2\pi$. Podle vzorce z matematické analýzy na výpočet ρ máme tedy

$$\begin{aligned} 2\pi &= \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{B_n}{n!}\right|}}, \\ \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{B_n}{n}\right|} &= \frac{1}{2\pi}. \end{aligned}$$

S pomocí obou vlastností limes superior[2] můžeme odhadnout absolutní hodnotu B_n shora i zdola:

1. Pro každé $\varepsilon > 0$ platí od jistého n_0 počínaje
$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\left|\frac{B_n}{n}\right|} &\le \frac{1}{2\pi} + \varepsilon, \\ |B_n| &\le \left(\frac{1}{2\pi} + \varepsilon\right)^n \cdot n!. \end{aligned}$$

2. Pro každé $\varepsilon > 0$ platí pro nekonečně mnoho n odhad
$$|B_n| \ge \left(\frac{1}{2\pi} - \varepsilon\right)^n \cdot n!.$$

Ukážeme, že vhodným postupem lze zjistit nejen odhad shora a zdola, ale že lze pro každé B_n nalézt i jeho přibližnou hodnotu, tj. číslo, které se mu blíží. Nejprve připomeňme, že funkce komplexní proměnné $f(z)$ má v singulárním bodě z_0 pól p-tého stupně, právě když pro koeficienty jejího Laurentova rozvoje v bodě z_0 platí $a_{-p} \neq 0$ a $a_n = 0$ pro $n < -p$. To je ekvivalentní s existencí konečné limity
$$\lim_{z \to z_0} f(z) \cdot (z - z_0)^p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Konkrétně stupeň pólů funkce $f(z) = \frac{z}{\mathrm{e}^z - 1}$ v bodech $\pm 2\pi i$ je 1, protože pomocí l'Hospitalova pravidla vypočítáme
$$\lim_{z \to 2\pi i} \frac{z}{\mathrm{e}^z - 1}(z - 2\pi i) = \lim_{z \to 2\pi i} \frac{z^2 - 2\pi i z}{\mathrm{e}^z - 1} = \lim_{z \to 2\pi i} \frac{2z - 2\pi i}{\mathrm{e}^z} = 2\pi i = a_{-1} = \mathrm{Rez}_{2\pi i}\, f.$$

Analogicky pro $z \to -2\pi i$ vyjde limita $a_{-1} = -2\pi i$. Má-li však (nějaká) funkce f v bodě z_0 pól stupně 1, její Laurentův rozvoj v tomto bodě má tvar
$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + ...,$$
takže funkce $f(z) - \frac{a_{-1}}{z - z_0}$ má rozvoj
$$f(z) - \frac{a_{-1}}{z - z_0} = a_0 + a_1(z - z_0) + ...$$
a je tedy holomorfní v bodě z_0. Z toho plyne, že funkce
$$g(z) := \frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} - \underbrace{\left(\frac{2\pi i}{z - 2\pi i} + \frac{-2\pi i}{z + 2\pi i}\right)}_{-1.\text{ členy rozvoje v bodech } \pm 2\pi i}$$
je holomorfní v bodech $\pm 2\pi i$ a tím pádem je holomorfní na kruhu se středem v nule o poloměru 4π, neboť další singulární body funkce $\frac{z}{\mathrm{e}^z - 1}$ jsou $\pm 4\pi i$. Její Laurentův rozvoj v bodě 0 je rozvojem do mocninné řady s poloměrem konvergence 4π.

---

[2]**Připomenutí pojmů z matematické analýzy:** $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ je hromadná hodnota reálné posloupnosti (A_n), právě když existuje z ní vybraná posloupnost taková, že $\lim_{n \to \infty} A_{k_n} = A$. Každá číselná posloupnost má hromadnou hodnotu. Množina hromadných hodnot posloupnosti má nejmenší a největší prvek. Limes superior je největší hromadná hodnota posloupnosti.

Z těchto definic a tvrzení plynou dvě vlastnosti limes superior. $\limsup_{n \to \infty} A_n = A$, právě když:

1. Pro každé ε je jen konečně mnoho prvků větších než $A + \varepsilon$, tj. $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0)\,(\forall n > n_0)\,(A_n < A + \varepsilon)$.
2. Pro každé ε existuje nekonečně mnoho prvků větších než $A - \varepsilon$, tj. $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists_\infty n)\,(A_n > A - \varepsilon)$.

Tato skutečnost nám umožní získat přibližné hodnoty Bernoulliových čísel. Nejprve upravíme

$$g(z) = \frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} - 2\pi i \frac{2\pi i + 2\pi i}{z^2 + 4\pi^2} = \frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} + \frac{8\pi^2}{z^2 + 4\pi^2} = \frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} + 2\frac{1}{1 + \frac{z^2}{4\pi^2}},$$

takže poslední zlomek je ve tvaru součtu geometrické řady s kvocientem $-\frac{z^2}{4\pi^2}$. Celou funkci $g(z)$ nyní snadno rozvineme do řady, přičemž ještě využijeme, že liché členy posloupnosti B_n počínaje B_3 jsou rovny nule.

$$g(z) = \underbrace{-\frac{1}{2}z}_{\frac{B_1}{1!}z^1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4\pi^2)^n} z^{2n} = -\frac{1}{2}z + \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{B_{2n}}{(2n)!} + 2\frac{(-1)^n}{(4\pi^2)^n}\right)}_{a_{2n}} z^{2n}.$$

Tato řada má poloměr konvergence $\rho = 4\pi$. Nyní odhadneme B_n zcela stejným postupem, jako jsme to již jednou udělali. Platí

$$\frac{1}{4\pi} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\left|\frac{B_{2n}}{(2n)!} + 2\frac{(-1)^n}{(4\pi^2)^n}\right|}.$$

Využijeme jen první vlastnosti limes superior, tj. že pro každé $\varepsilon > 0$ platí od jistého n_0 počínaje

$$\begin{aligned} \sqrt[2n]{\left|\frac{B_{2n}}{(2n)!} + 2\frac{(-1)^n}{(4\pi^2)^n}\right|} &\leq \frac{1}{4\pi} + \varepsilon, \\ \left|\frac{B_{2n}}{(2n)!} + 2\frac{(-1)^n}{(4\pi^2)^n}\right| &\leq \left(\frac{1}{4\pi} + \varepsilon\right)^{2n}. \end{aligned}$$

Poslední vztah vlastně odhaduje vzdálenost čísla $\frac{B_{2n}}{(2n)!}$ od čísla $-2\frac{(-1)^n}{(4\pi^2)^n}$. Proto můžeme napsat

$$\frac{B_{2n}}{(2n)!} = -2\frac{(-1)^n}{(4\pi^2)^n} + O\left(\left(\frac{1}{4\pi} + \varepsilon\right)^{2n}\right)$$

a definovat posloupnost C_{2n} jako posloupnost přibližných hodnot B_{2n} vztahem

$$C_{2n} = -2\,(2n)!\frac{(-1)^n}{(4\pi^2)^n}.$$

Následující tabulka udává srovnání skutečných hodnot B_n a jejich odhadů:

$2n$	2	4	6	8	10	12	14	16
B_{2n}	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{3617}{510}$
$B_{2n} \approx$	$0.16\overline{6}$	$-0.033\overline{3}$	0.0238	$-0.0333\overline{3}$	$0.075\overline{75}$	-0.25311	$1.16666\overline{6}$	-7.092156
$C_{2n} \approx$	0.10132	-0.03079	0.0234	-0.03319	0.07568	-0.25305	1.166595	-7.092048

Poznámka. Posloupnost C_{2n} pro $n \to \infty$ nekonverguje k B_{2n}, pro další členy by už rozdíly mezi B_{2n} a C_{2n} rostly. To není překvapením, protože odhad rozdílu je

$$(2n)!O\left(\left(\frac{1}{4\pi} + \varepsilon\right)^{2n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} +\infty.$$

Pokud bychom chtěli získat přesnější odhady B_{2n}, mohli bychom odečtením potřebných členů vyrobit funkci, kterou lze rozvinout do mocninné řady s poloměrem konvergence $2k\pi > 4\pi$.

0.1.4 Invertovací formule

Věta 0.1.6. *Nechť* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ *jsou dvě posloupnosti, nechť* $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *je*

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k.$$

Potom

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \left(-1\right)^{n-k}.$$

Poznámka. Je zřejmé, proč se tato věta nazývá invertovací formule. Udává totiž vyjádření členů b_n pomocí a_n při znalosti vyjádření a_n pomocí b_n. Podobných invertovacích formulí je více.

Důkaz. Dokázat tuto větu s použitím EGF je snadné. Uvažujme následující EGF:

$$\begin{aligned} (a_n)_{n=0}^{\infty} &\xrightarrow{EGF} A(z), \\ (b_n)_{n=0}^{\infty} &\xrightarrow{EGF} B(z). \end{aligned}$$

Podle pravidla (0.1.2) platí

$$\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k}_{a_n} \right) \xrightarrow{EGF} e^z B(z).$$

Dostáváme tedy vztah $A(z) = e^z B(z)$. Zpětně vyjádříme $B(z) = e^{-z} A(z)$ a provedeme rozvoj funkce e^{-z} do mocninné řady. Dojdeme tak k rovnosti

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^n}{n!} z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n = e^{-z} A(z) = B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n.$$

Vynásobíme řady podle součinového vzorce a získáme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \frac{\left(-1\right)^{n-k}}{(n-k)!} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n.$$

Porovnáním koeficientů potom dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \frac{\left(-1\right)^{n-k}}{(n-k)!} &= \frac{b_n}{n!}, \\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \left(-1\right)^{n-k} &= b_n. \end{aligned}$$

□

Použití invertovací formule

Označme d_n počet permutací π na množině $\{1, 2, ..., n\}$, které nemají pevný bod, tj. platí pro ně

$$\left(\forall k \in \hat{n}\right) \left(\pi(k) \neq k\right).$$

Platí

- $d_1 = 0$,

- $d_2 = 1$ (pouze permutace $2, 1$),
- $d_3 = 2$ (permutace $2, 3, 1$ a $3, 1, 2$).

Snadno se odvodí následující rekurentní vztah.

$$n! = d_n + n \cdot d_{n-1} + \binom{n}{2} d_{n-2} + ... + \binom{n}{k} d_{n-k} + ... + \binom{n}{n-2} d_2 + \binom{n}{n-1} d_1 + 1.$$

Všechny permutace množiny $\hat{n}$ lze totiž rozdělit na permutace bez pevného bodu (těch je d_n), permutace s jedním pevným bodem (těch je $n \cdot d_n$), permutace s dvěma pevnými body atd. Obecně permutací s k pevnými body je $\binom{n}{k} d_{n-k}$, protože pevné body lze vybrat $\binom{n}{k}$ způsoby a zbytek je permutace $n-k$ čísel bez pevného bodu, kterou lze vybrat d_{n-k} způsoby). S použitím rovnosti

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

a s dodefinováním $d_0 := 1$ lze tento vztah upravit na

$$n! = \binom{n}{n} d_n + \binom{n}{n-1} d_{n-1} + ... + \binom{n}{1} d_1 + \binom{n}{0} d_0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k.$$

Potom můžeme aplikovat invertovací formuli, takže lze postupně upravovat:

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! \, (-1)^{n-k} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \, (-1)^{n-k} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \, (-1)^k =$$

... využijeme $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \, (-1)^k = \mathrm{e}^{-1}$ a přepíšeme na ...

$$= n! \left(\mathrm{e}^{-1} - \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}}_{R} \right).$$

Nyní aplikujeme Leibnizovo kritérium, které říká, že zbytek R po alternující řadě je v absolutní hodnotě menší nebo roven než první zanedbaný člen, v našem případě $\frac{1}{(n+1)!}$. Platí tedy

$$d_n = n!\mathrm{e}^{-1} - n!R,$$

kde $n! \, |R| \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2}$ pro $n \geq 2$. Lze tedy napsat, že $d_n = n!\mathrm{e}^{-1} - \varepsilon$, kde $|\varepsilon| < \frac{1}{2}$, neboli $\varepsilon \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Dále upravíme na $n!\mathrm{e}^{-1} = d_n + \varepsilon$, a tedy

$$n!\mathrm{e}^{-1} + \frac{1}{2} = d_n + \tilde{\varepsilon},$$

kde $\tilde{\varepsilon} \in (0, 1)$. Protože $d_n \in \mathbb{N}$, tak pokud vezmeme celou část levé i pravé strany této rovnosti, dostaneme explicitní vyjádření pro d_n:

$$\left[\frac{n!}{\mathrm{e}} + \frac{1}{2} \right] = [d_n + \tilde{\varepsilon}] = d_n.$$

0.1.5 Stirlingova čísla

Definice 0.1.7. Nechť $n \geq k \geq 1$. **Stirlingovo číslo** (druhého druhu)

$$\left\{ n \atop k \right\}$$

definujeme jako počet rozkladů množiny $\hat{n}$ na k neprázdných podmnožin.

Příklad.

$$\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7,$$

protože rozklady množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ na dvě neprázdné podmnožiny mohou být $\boxed{1\,|\,234}$, $\boxed{2\,|\,134}$, $\boxed{3\,|\,124}$, $\boxed{4\,|\,123}$, $\boxed{12\,|\,34}$, $\boxed{13\,|\,24}$, $\boxed{14\,|\,23}$.

Poznámka 0.1.8. Zřejmě $\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1$, $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$. Dále

- $$\left\{ {n \atop 2} \right\} = \frac{2^n - 2}{2} = 2^n - 1,$$

  protože když množinu $\hat{n}$ rozdělujeme na dvě neprázdné podmnožiny, tak z ní vybereme libovolnou podmnožinu kromě $\emptyset$ a $\hat{n}$ (a takových podmnožin je $2^n - 2$). Druhou podmnožinu pak tvoří zbytek. Výsledný počet dělíme dvěma, neboť na pořadí podmnožin (která je ta první a která ta druhá) nezáleží.

- $$\left\{ {n \atop n-1} \right\} = \binom{n}{2},$$

  protože počet rozkladů $\hat{n}$ na $n - 1$ neprázdných podmnožin odpovídá počtu dvouprvkových podmnožin $\hat{n}$ (právě jedna podmnožina v rozkladu má totiž dva prvky).

Poznámka 0.1.9. Je zřejmé, že v rozkladu množiny $\hat{n}$ platí právě jedno z následujících tvrzení:

- Buď prvek n tvoří jednoprvkovou podmnožinu,
- nebo prvek n patří do nějaké víceprvkové podmnožiny množiny $\hat{n}$.

Podle této úvahy lze sestavit následující rekurentní vztah:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k\left\{ {n-1 \atop k} \right\}. \tag{0.1.3}$$

$\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$ je totiž počet rozkladů, kde n je „zvlášť" v jednoprvkové množině a $k\left\{ {n-1 \atop k} \right\}$ je počet rozkladů, kdy n „přihodíme" do jedné z k neprázdných podmnožin z rozkladu $\widehat{n-1}$, takže vznikne víceprvková podmnožina.

Vzpomeňme si na obdobný vztah, který platí pro kombinační čísla:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Definice 0.1.10. Pro $n, k \in \mathbb{Z}$ rozšiřujeme definici Stirlingova čísla takto:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \begin{cases} 0 & \text{pro } n < k \text{ nebo } k < 0, \\ 0 & \text{pro } k = 0 \text{ a } n \neq 0, \\ 1 & \text{pro } n = k = 0. \end{cases}$$

V tom případě platí vztah (0.1.3) pro každé $n, k \in \mathbb{Z}$ kromě $n = k = 0$.

Nyní najdeme explicitní vyjádření Stirlingova čísla. Nechť $k \geq 0$. Potom definujeme mocninnou řadu

$$B_k(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ {n \atop k} \right\} x^n$$

a naším cílem tedy opět bude najít její koeficienty. Podotkněme, že

1. B_k je skutečně mocninná řada, protože podle rozšířené definice Stirlingových čísel platí $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\{ {n \atop k} \right\} x^n = \sum_{n=k}^{\infty} \left\{ {n \atop k} \right\} x^n$. Rozsah sčítacího indexu $n \in \mathbb{Z}$ však bude velmi šikovný při manipulaci se sumami.
2. Opět podle definice 0.1.10 platí $B_0(x) = 1$.

Nyní použijeme rovnost (0.1.3) a dosadíme do definice B_k. Přitom s výhodou využíváme rozsah indexu $n \in \mathbb{Z}$.

$$B_k(x) = x \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} x^{n-1} + kx \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{n-1} = xB_{k-1}(x) + kxB_k(x).$$

Z toho vyjádříme

$$B_k(x) = \frac{x}{1-kx} B_{k-1}(x)$$

a postupným dosazováním $B_{k-1}(x)$, $B_{k-2}(x)$,... dostaneme

$$B_k(x) = \frac{x}{1-kx} \cdot \frac{x}{1-(k-1)x} \cdot \frac{x}{1-(k-2)x} \cdots \frac{x}{1-2x} \frac{x}{1-x} \cdot \underbrace{1}_{B_0(x)} \cdot = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}.$$

Jestliže tuto (generující) funkci rozvineme do mocninné řady, tak koeficient u x^n bude díky jednoznačnosti rozvoje právě $\left\{ {n \atop k} \right\}$. Abychom byli schopni rozvoj provést, rozložíme nejprve funkci $B_k(x)/x^k$ na parciální zlomky. Obecně má tento rozklad tvar

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)} = \frac{\alpha_1}{1-x} + \frac{\alpha_2}{1-2x} + ... + \frac{\alpha_k}{1-kx}. \tag{0.1.4}$$

Nyní je třeba nalézt koeficienty α_j. Zvolme si konkrétní $j \in \hat{k}$. Rovnost (0.1.4) vynásobíme výrazem $(1-jx)$ a poté dosadíme $x = \frac{1}{j}$. Dostaneme

$$\begin{aligned} \left.\frac{1}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-(j-1)x)(1-(j+1)x)\cdots(1-kx)}\right|_{x=\frac{1}{j}} &= \alpha_j, \\ \frac{1}{\left(1-\frac{1}{j}\right)\left(1-\frac{2}{j}\right)\cdots\left(1-\frac{j-1}{j}\right)\left(1-\frac{j+1}{j}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{j}\right)} &= \alpha_j. \end{aligned}$$

Pokud nyní rozšíříme zlomek nalevo výrazem j^{k-1} tak, že každou závorku ve jmenovateli vynásobíme j, dostaneme

$$\frac{j^{k-1}}{\underbrace{(j-1)(j-2)\cdots 2\cdot 1}_{(j-1)!} \cdot \underbrace{(-1)\cdot(-2)\cdots(j-k)}_{(k-j)!(-1)^{k-j}}} = \frac{j^k\,(-1)^{k-j}}{j!\,(k-j)!} = \alpha_j.$$

Koeficienty α_j jsme tedy získali. Rozvoje jednotlivých zlomků $\frac{1}{1-jx}$ jsou přitom snadné, jedná se totiž o součty geometrických řad s kvocienty jx. Celý rozvoj $B_k(x)$ tedy je

$$B_k(x) = x^k \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \sum_{n=0}^{\infty} (jx)^n .$$

Nyní zaměníme pořadí sum, dosadíme hodnoty α_j a dostaneme

$$B_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} \frac{j^k\,(-1)^{k-j}}{j!\,(k-j)!} j^n x^{n+k}.$$

Koeficient u x^n je tedy

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{j=1}^{k} \frac{j^k\,(-1)^{k-j}}{j!\,(k-j)!} j^{n-k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{j^n\,(-1)^{k-j}}{j!\,(k-j)!} = \sum_{j=0}^{k} \frac{j^n\,(-1)^{k-j}}{j!\,(k-j)!}.$$

Poznámka. Explicitní vzorec pro $\left\{{n \atop k}\right\}$ byl odvozen za použití rozšířené definice 0.1.10, a proto tuto definici splňuje. Jen pro zajímavost tak například víme, že

$$\left\{{13 \atop 19}\right\} = 0 = \sum_{j=1}^{19} \frac{j^{13}\,(-1)^{19-j}}{j!\,(19-j)!}.$$

0.1.6 Bellova čísla

Definice 0.1.11. Pro $n \in \mathbb{N}_0$ definujeme **Bellovo číslo** b_n jako

$$b_n := \sum_{k \geq 0} \left\{{n \atop k}\right\}.$$

Poznámka. Platí $b_0 = 1$ a pro $n > 0$ je

$$b_n := \sum_{k \geq 1} \left\{{n \atop k}\right\}$$

rovno počtu různých relací ekvivalence, které mohou existovat na n-prvkové množině. To je zřejmé, protože každá ekvivalence rozděluje n-prvkovou množinu na třídy ekvivalence, tj. na nějaký počet (k) neprázdných podmnožin.

Příklad 0.1.12. Počet různých ekvivalencí na 4-prvkové množině je 15. Podle poznámky 0.1.8 umíme totiž vypočítat

$$b_4 = \left\{{4 \atop 1}\right\} + \left\{{4 \atop 2}\right\} + \left\{{4 \atop 3}\right\} + \left\{{4 \atop 4}\right\} = 1 + 7 + 6 + 1 = 15.$$

Podívejme se, jak dokážeme vyjádřit b_n po dosazení explicitního vzorce pro $\left\{{n \atop k}\right\}$. Platí

$$b_n = \sum_{k \geq 0} \left\{{n \atop k}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{{n \atop k}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \underbrace{\frac{j^n}{j!}}_{a_j} \cdot \underbrace{\frac{(-1)^{k-j}}{(k-j)!}}_{b_{k-j}} =$$

... použijeme pravidlo pro součin mocninných řad ...

$$= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^n}{j!} \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \right) = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^n}{j!} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^n}{j!} = b_n.$$

Tento tvar b_n se nám bude hodit v následující větě.

Věta 0.1.13. *Označme*

$$B(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n.$$

Potom platí

$$B(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^z - 1},$$

tj.

$$(b_n)_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{EGF} B(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^z - 1}.$$

Důkaz. Do definice $B(z)$ dosadíme právě vypočítanou hodnotu b_n a upravujeme.

$$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^n}{j!} z^n}_{(*)} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j^n}{n!} z^n =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(jz)^n}{n!}}_{\mathrm{e}^{jz}} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (\mathrm{e}^z)^j = \frac{1}{\mathrm{e}} \mathrm{e}^{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^z - 1}.$$

Poznamenejme, že výsledek je konečné číslo. To spolu s konečností sumy $(*)$ ospravedlňuje záměnu sum v prvním řádku. $\square$

Pomocí předchozí věty odvodíme rekurentní vztah pro výpočet b_n. Vyjdeme ze vztahu

$$\mathrm{e}^{\mathrm{e}^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n,$$

který zlogaritmujeme a následně zderivujeme:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^z - 1 &= \ln \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n, \\ \mathrm{e}^z &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(n-1)!} z^{n-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n}. \end{aligned}$$

Nyní vyjádříme $\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ a vynásobíme jmenovatelem:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{n+1}}{n!} z^n.$$

Použijeme vzorec pro násobení mocninných řad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{n+1}}{n!} z^n.$$

Nakonec porovnáme koeficienty u obou mocninných řad. Platí tedy

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{n!} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k)!}, \\ b_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k. \end{aligned}$$

Příklad.

$$\begin{aligned} b_0 &= 1 \\ b_1 &= \binom{0}{0} \cdot b_0 = 1 \cdot 1 = 1 \\ b_2 &= \binom{1}{0} \cdot b_0 + \binom{1}{1} \cdot b_1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 \\ b_3 &= \binom{2}{0} \cdot b_0 + \binom{2}{1} \cdot b_1 + \binom{2}{2} \cdot b_2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 5 \\ b_4 &= \binom{3}{0} \cdot b_0 + \binom{3}{1} \cdot b_1 + \binom{3}{2} \cdot b_2 + \binom{3}{3} \cdot b_3 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 5 = 15. \end{aligned}$$

Číslo b_4 jsme již vypočítali z definice pomocí Stirlingových čísel v příkladu 0.1.12.

Poznámka 0.1.14. Víme, že b_n je počet ekvivalencí na množině $\hat{n}$. Následující kombinatorickou úlohou je možné získat explicitní vzorec pro výpočet b_n.

Uvažujme ekvivalence provádějících rozklad $\hat{n}$ na k tříd. Nechť tyto třídy mají $l_1, l_2, ..., l_k$ prvků, přičemž samozřejmě $l_j \geq 1$ a $\sum_{j=1}^{k} l_j = n$. Počet takových ekvivalencí je

$$\frac{1}{k!}\binom{n}{l_1}\binom{n-l_1}{l_2}\binom{n-l_1-l_2}{l_3}\cdots\binom{n-\sum_{j=1}^{k-2} l_j}{l_{k-1}}\underbrace{\binom{n-\sum_{j=1}^{k-1} l_j}{l_k}}_{\binom{l_k}{l_k}=1},$$

což je celkem zřejmé. Člen $\frac{1}{k!}$ vyjadřuje, že na pořadí (postupného) výběru tříd ekvivalence nezáleží. Počet všech ekvivalencí s k třídami je tedy

$$\sum_{\substack{l_j \geq 1,\ j\in\hat{k} \\ \sum l_j = n}} \frac{1}{k!}\binom{n}{l_1}\binom{n-l_1}{l_2}\binom{n-l_1-l_2}{l_3}\cdots\binom{n-\sum_{j=1}^{k-2} l_j}{l_{k-1}}$$

a celkový počet ekvivalencí je potom zřejmě

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l_j \geq 1,\ j\in\hat{k} \\ \sum l_j = n}} \frac{1}{k!}\binom{n}{l_1}\binom{n-l_1}{l_2}\binom{n-l_1-l_2}{l_3}\cdots\binom{n-\sum_{j=1}^{k-2} l_j}{l_{k-1}}.$$

Jak je vidět, pro výpočet b_n se tento vzorec nehodí. S jeho pomocí bychom však byli schopni dokázat větu 0.1.13, pokud bychom využili *skládání generujících funkcí.*

0.1.7 Skládání generujících funkcí

Mějme mocninné řady s EGF

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{f_0}{0!} + \frac{f_1}{1!}z + \frac{f_2}{2!}z^2 + ..., \\ G(z) &= \frac{g_0}{0!} + \frac{g_1}{1!}z + \frac{g_2}{2!}z^2 + ... \end{aligned}$$

a zajímejme se, jakou posloupností je určena řada se složenou exponenciální generující funkcí $F(G(z))$. Pokud dosadíme z právě rozepsaných vztahů, dostaneme

$$F(G(z)) = \frac{f_0}{0!} + \frac{f_1}{1!}\left(\frac{g_0}{0!} + \frac{g_1}{1!}z + \frac{g_2}{2!}z^2 + ...\right) + \frac{f_2}{2!}\left(\frac{g_0}{0!} + \frac{g_1}{1!}z + \frac{g_2}{2!}z^2 + ...\right)^2 + ...$$

V této (zřejmě opět) mocninné řadě bychom tedy chtěli získat koeficient u z^n.

Nejprve si uvědomíme, že už nultý koeficient (u z^0) je nekonečná číselná řada

$$\frac{f_0}{0!} + \frac{f_1}{1!}\frac{g_0}{0!} + \frac{f_2}{2!}\left(\frac{g_0}{0!}\right)^2 + ...$$

a volbou hodnoty proměnné z nelze ovlivnit její konvergenci. Proto v následujícím uvažujeme pouze takové EGF, pro něž $g_0 = 0$. Koeficient u z^0 je potom zřejmě $\frac{f_0}{0!} = f_0$.

Abychom získali koeficient u z^n $\boxed{\text{pro } n \geq 1}$, uvažme, že nejmenší mocnina v každé závorce je z a závorky jsou postupně umocňovány na $0, 1, 2, 3, ...$ V každém členu

$$\frac{f_k}{k!} \cdot \left(\frac{g_1}{1!}z + \frac{g_2}{2!}z^2 + ...\right)^k$$

je tedy nejmenší mocnina po roznásobení z^k. Z toho plyne, že koeficient u z^n můžeme hledat roznásobováním pouze prvních n závorek, vyšší mocniny na něj nemají vliv.

Vezměme si znovu k-tý člen součinové řady, tj. člen

$$\frac{f_k}{k!}\cdot\left(\frac{g_1}{1!}z+\frac{g_2}{2!}z^2+...\right)^k=\frac{f_k}{k!}\cdot\underbrace{\left(\frac{g_1}{1!}z+\frac{g_2}{2!}z^2+...\right)\cdot\left(\frac{g_1}{1!}z+\frac{g_2}{2!}z^2+...\right)\cdots\left(\frac{g_1}{1!}z+\frac{g_2}{2!}z^2+...\right)}_{k\text{-krát}}.$$

Aby v nějakém členu po roznásobení závorek vzniklo z^n, musí se $\forall j\in\hat{k}$ mezi sebou násobit členy (j-tý člen pochází z j-té závorky)

$$\frac{g_{l_j}}{l_j!}z^{l_j},$$

pro něž platí

$$\sum_{j=1}^{k}l_j=1$$

a samozřejmě $l_j\geq 1$. Koeficient u z^n vznikne jako součet součinů přes všechny možné výběry členů v jednotlivých závorkách. Tento koeficient je tedy roven

$$\tilde{h}_n=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}}_{\text{suma přes } n \text{ prvních členů}}\underbrace{\frac{f_k}{k!}\cdot\sum_{\substack{l_j\geq 1,\ j\in\hat{k}\\ \sum l_j=n}}\frac{g_{l_1}}{l_1!}\cdot\frac{g_{l_2}}{l_2!}\cdots\frac{g_{l_k}}{l_k!}}_{\text{koeficient vzniklý z } k\text{-tého členu}}.$$

Podle definice EGF je

$$(a_n)_{n=0}^{\infty}\xrightarrow{EGF}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n,$$

takže můžeme shrnout

$$(h_n)_{n=0}^{\infty}=\left(n!\tilde{h}_n\right)_{n=0}^{\infty}\xrightarrow{EGF}F(G(z)).$$

Nyní dosadíme $h_n=n!\tilde{h}_n$ a použijeme rovnost

$$\frac{n!}{l_1!l_2!\cdots l_k!}=\binom{n}{l_1}\binom{n-l_1}{l_2}\binom{n-l_1-l_2}{l_3}\cdots\binom{n-\sum_{j=1}^{k-1}l_j}{l_k},$$

kterou lze snadno ověřit. Dostaneme tak konečně vyjádření koeficientů posloupnosti příslušné generující funkci $F(G(z))$:

$$h_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{f_k}{k!}\sum_{\substack{l_j\geq 1,\ j\in\hat{k}\\ \sum l_j=n}}\binom{n}{l_1}\binom{n-l_1}{l_2}\binom{n-l_1-l_2}{l_3}\cdots\binom{n-\sum_{j=1}^{k-1}l_j}{l_k}\prod_{j=1}^{k}g_{l_j}. \tag{0.1.5}$$

Příklad. Vraťme se nyní k poznámce 0.1.14. Uvažujme mocninné řady

$$(1)_{n=0}^{\infty}\xrightarrow{EGF}F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n=\mathrm{e}^z,$$

$$(1)_{n=1}^{\infty}\xrightarrow{EGF}G(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n=\mathrm{e}^z-1.$$

Potom exponenciální generující funkce $F(G(z))=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^z-1}$ má podle (0.1.5) koeficienty

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{\substack{l_j\geq 1,\ j\in\hat{k}\\ \sum l_j=n}}\binom{n}{l_1}\binom{n-l_1}{l_2}\binom{n-l_1-l_2}{l_3}\cdots\binom{n-\sum_{j=1}^{k-2}l_j}{l_{k-1}},$$

tedy přímo Bellova čísla. Tím jsme alternativním způsobem dokázali větu 0.1.13.

Příklad 0.1.15. Určete d_n :=počet 2-regulárních[3] grafů na n vrcholech.

Najdeme jednoduchý rekurentní vztah pro výpočet d_n. Řešení se bude skládat ze tří kroků:

1. Z kombinatorické úvahy sestavíme složitý explicitní vzorec pro výpočet d_n.
2. Vzorec upravíme na tvar odpovídající tvaru členu posloupnosti, která přísluší určité složené EGF, a tuto EGF vypočítáme.
3. Podobně jako u Bellových čísel z EGF odvodíme rekurentní vztah.

Krok 1. Lze si snadno rozmyslet, že 2-regulární graf je právě takový, který vznikne jako disjunktní sjednocení určitého počtu kružnic.

Nejprve nalezněme počet grafů na n vrcholech, které jsou disjunktním sjednocením právě k kružnic. Každá kružnice má minimálně 3 vrcholy. Konkrétně tedy máme kružnice délek $l_1, l_2, ..., l_k$, přičemž $\sum_{j=1}^{k} l_j = n$ a $\left(\forall j \in \hat{k}\right)(l_j \geq 3)$.

Chceme-li spočítat počet různých kružnic na l vrcholech $v_1, ..., v_l$, zafixujeme vrchol v_1, z něhož kružnice začíná a do nějž se opět vrací. Ostatní vrcholy mohou být v libovolné z $(l-1)!$ permutací. Na orientaci kružnice však nezáleží, takže na konkrétních l vrcholech existuje $\frac{(l-1)!}{2}$ různých kružnic.

Počet grafů na n vrcholech, které jsou sjednocením právě k kružnic, tedy je

$$\frac{1}{k!} \sum_{\substack{l_j \geq 3,\ j \in \hat{k} \\ \sum l_j = n}} \binom{n}{l_1} \binom{n-l_1}{l_2} \binom{n-l_1-l_2}{l_3} \cdots \binom{n-\sum_{j=1}^{k-1} l_j}{l_k} \cdot \frac{(l_1-1)!}{2} \cdot \frac{(l_2-1)!}{2} \cdots \frac{(l_k-1)!}{2},$$

přičemž kombinační čísla odpovídají počtu způsobů výběru l_j vrcholů pro jednotlivé kružnice a zlomek $\frac{1}{k!}$ vyjadřuje, že nezávisí na pořadí těchto kružnic. d_n je pak součet uvedených výrazů pro všechna přípustná k:

$$d_n = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{3}\right]} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{l_j \geq 3,\ j \in \hat{k} \\ \sum l_j = n}} \binom{n}{l_1} \binom{n-l_1}{l_2} \binom{n-l_1-l_2}{l_3} \cdots \binom{n-\sum_{j=1}^{k-1} l_j}{l_k} \cdot \prod_{j=1}^{k} \frac{(l_j-1)!}{2}.$$

Krok 2. Abychom dostali vzorec pro d_n do tvaru odpovídajícího n-tému koeficientu řady s EGF, definujeme

$$g_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!}{2} & \text{pro } n \geq 3, \\ 0 & \text{pro } n \in \{0,1,2\}. \end{cases}$$

Potom

$$d_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{l_j \geq 1,\ j \in \hat{k} \\ \sum l_j = n}} \binom{n}{l_1} \binom{n-l_1}{l_2} \binom{n-l_1-l_2}{l_3} \cdots \binom{n-\sum_{j=1}^{k-1} l_j}{l_k} \cdot \prod_{j=1}^{k} g_{l_j},$$

protože

1. Je jasné, že je-li $k > \left[\frac{n}{3}\right]$, tak jedno z $l_1, ..., l_k$ bude $l_j < 3$, takže $g_{l_j} = 0$. Lze tedy brát k od jedné až do n.
2. Protože $l_j < 3 \Rightarrow g_{l_j} = 0$, není nutné uvažovat podmínku $l_j \geq 3$.

Z tvaru d_n, který již odpovídá (0.1.5), jsme schopni vyjádřit členy posloupností $(f_n), (g_n)$, které přísluší řadám s generujícími funkcemi F a G. Připomeňme však, že vztah (0.1.5) platí pouze pro $n \geq 1$ a na nultý koeficient $d_0 = f_0$ zde dosud nemáme žádnou podmínku.

$(d_n)_{n=0}^{\infty}$ tedy přísluší exponenciální generující funkci, která vznikne složením

$$(f_n)_{n=0}^{\infty} = (1)_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{EGF} F(z) = \mathrm{e}^z,$$

[3] $G = (V, E)$ je r-regulární, právě když $(\forall v \in V)(d_G(v) = r)$.

přičemž jsme definovali $d_0 = f_0 = 1$, a

$$(g_n)_{n=0}^{\infty} \xrightarrow{EGF} G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{n!} z^n.$$

Zbývá vypočítat $G(z)$. Dosadíme z definice (g_n) a dostaneme

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n}{n!} z^n = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n-1)!}{2n!} z^n = \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{z^n}{n} =$$

... derivací této řady je však geometrická řada, jejíž součet známe ...

$$= \frac{1}{2} \int_0^z \left(\underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} t^{n-1}}_{=t^2 \frac{1}{1-t} = -1 - t + \frac{1}{1-t}} \right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \left(-z - \frac{z^2}{2} - \ln|1-z| \right).$$

Generující funkce příslušná $(d_n)_{n=0}^{\infty}$ je tedy

$$F(G(z)) = \mathrm{e}^{-\frac{z}{2} - \frac{z^2}{4} - \frac{1}{2}\ln|1-z|} = \frac{1}{\sqrt{1-z}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{z}{2} - \frac{z^2}{4}}.$$

Krok 3. Nyní z $F(G(z))$ získáme rekurentní vztah pro d_n stejně jako u Bellových čísel. Platí rovnost

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} z^n = \frac{1}{\sqrt{1-z}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{z}{2} - \frac{z^2}{4}},$$

kterou zlogaritmujeme a zderivujeme:

$$\begin{aligned} \ln \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} z^n &= -\frac{z}{2} - \frac{z^2}{4} - \frac{1}{2} \ln(1-z), \\ \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{(n-1)!} z^{n-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} z^n} &= -\frac{1}{2} - \frac{z}{2} + \frac{1}{2(1-z)} = -\frac{1}{2} - \frac{z}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} z^n. \end{aligned}$$

Opět vynásobíme jmenovatelem a následně použijeme vzorec pro součin mocninných řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{(n-1)!} z^{n-1} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=2}^{\infty} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} z^n \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{k!} z^{n+2}.$$

Nakonec porovnáme koeficienty u z^{n-1}:

$$\begin{aligned} \frac{d_n}{(n-1)!} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-3} \frac{d_k}{k!}, \\ d_n &= \frac{(n-1)!}{2} \sum_{k=0}^{n-3} \frac{d_k}{k!}. \end{aligned}$$

Výsledek si můžeme ověřit na prvních čtyřech členech posloupnosti. Z hlavy víme

$$d_0 = 1, d_1 = d_2 = 0, d_3 = 1, d_4 = 3$$

a podle našeho rekurentního vztahu je

$$d_4 = \frac{3!}{2} \left(\frac{d_0}{0!} + \frac{d_1}{1!} \right) = \frac{6}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{0}{1} \right) = 3.$$